ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Μοντέρνα Θεωρία Ελέγχου

Ενότητα 18. Ασυμπτωτική ευστάθεια και σταθεροποιησιμότητα γραμμικών συστημάτων

Νίκος Καραμπετάκης
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Περιεχόμενα Ενότητας

- Ασυμπτωτικά ευσταθές σύστημα.
- Σταθεροποιήσιμο σύστημα.

Σκοποί Ενότητας

- Μελέτη της έννοιας του ασυμπτωτικά ευσταθούς συστήματος.
- Μελέτη της έννοιας της σταθεροποιησιμότητα ενός συστήματος.

Ασυμπτωτικά ευσταθές σύστημα (1)

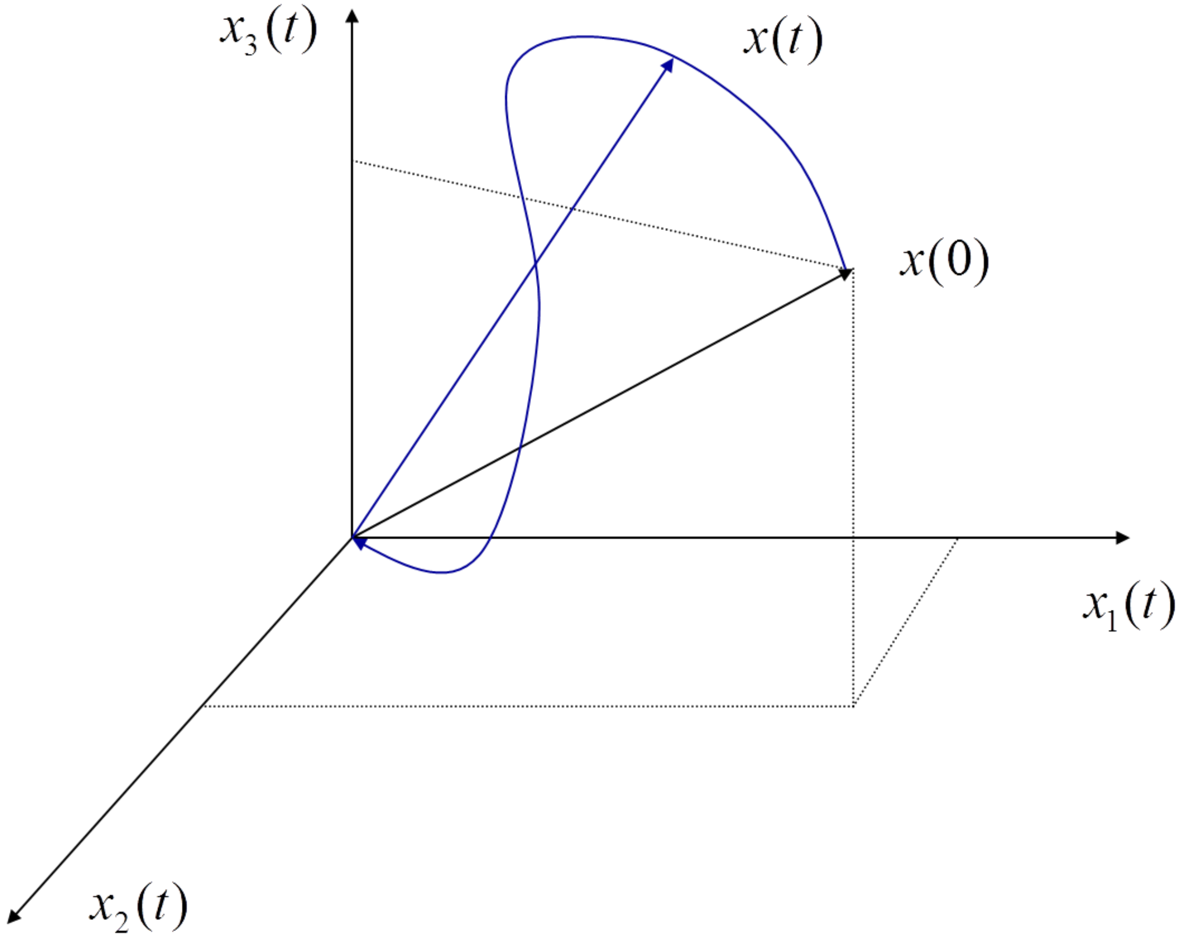
Έστω το ελεύθερο εισόδων σύστημα του χώρου των καταστάσεων

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \; \textbf{(1)}$$

Ορισμός. Το σύστημα (1) ονομάζεται **ασυμπτωτικά ευσταθές** αν, για κάθε αρχική συνθήκη $x(0)$, η λύση $x(t)$ της (1) τείνει στην αρχή των αξόνων (δηλαδή στο $[0 \quad 0 \quad \dots \quad 0]^T \in \mathbb{R}^{n\times 1}$) καθώς ο χρόνος $t \to \infty$

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} e^{At}x(0) = 0$$

Ασυμπτωτικά ευσταθές σύστημα (2)



Ασυμπτωτικά ευσταθές σύστημα (3)

Επειδή η λύση της (1) για αρχική συνθήκη $x(0)$ είναι η

$$x(t) = e^{At}x(0) = Ue^{\Lambda t}U^{-1}x(0) = Ue^{\Lambda t}Vx(0) =$$

$$= \left(u_1 e^{\lambda_1 t} v_1^T + u_2 e^{\lambda_2 t} v_2^T + \cdots + u_n e^{\lambda_n t} v_n^T\right)x(0)$$

όπου $\lambda_i \in \mathbb{C}, i = 1,2, . . , n$ είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα A, έχουμε το παρακάτω Θεώρημα.

Θεώρημα. Το σύστημα (1) είναι **ασυμπτωτικά ευσταθές**, αν όλες οι ιδιοτιμές $\lambda_i \in \mathbb{C}, i = 1,2, . . , n$ του πίνακα A βρίσκονται εντός του ανοικτού αριστερού ημι-επιπέδου $\mathbb{C}^- = \{s \in \mathbb{C}, Re(s) < 0\}$.

Σταθεροποιήσιμο σύστημα (1)

Ορισμός. Μια ιδιοτιμή $\lambda_i \in \mathbb{C}$ ενός πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ονομάζεται **ευσταθής**

αν $Re(\lambda_i) < 0$ και ασταθής αν $Re(\lambda_i) > 0$.

Ορισμός. Ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ονομάζεται **ευσταθής** αν όλες οι ιδιοτιμές του $\lambda_i \in \mathbb{C}, i = 1,2,..,n$ είναι ευσταθείς.

Ορισμός. Ένα σύστημα

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

ονομάζεται **σταθεροποιήσιμο** (**stabilizable**) αν υπάρχει πίνακας F τέτοιος ώστε ο πίνακας $A + BF$ είναι ευσταθής.

Σταθεροποιήσιμο σύστημα (2)

- Αν το σύστημα είναι ελέγξιμο τότε, σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, υπάρχει πίνακας F τέτοιος ώστε ο πίνακας $A + BF$ να έχει αυθαίρετες ιδιοτιμές.
- Αν το σύστημα είναι ελέγξιμο και επιλέξουμε τον F έτσι ώστε όλες οι ιδιοτιμές $\lambda_i \in \mathbb{C}, i = 1,2,..,n$ του πίνακα $A + BF$ να βρίσκονται εντός του ανοικτού αριστερού ημι-επιπέδου $\mathbb{C}^-$, τότε ο πίνακας $A + BF$ θα είναι ευσταθής.

Άρα:

Η ελεγξιμότητα συνεπάγεται την σταθεροποιησιμότητα. Το αντίστροφο δεν ισχύει.

Σταθεροποιήσιμο σύστημα (3)

Δηλαδή, αν το σύστημα

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad \textbf{(2)}$$

είναι σταθεροποιήσιμο, αν δηλαδή υπάρχει πίνακας F τέτοιος ώστε ο πίνακας $A + BF$ είναι ευσταθής, τότε αυτό δεν συνεπάγεται ότι το σύστημα (2) είναι ελέγξιμο.

Για παράδειγμα, ένα ασταθές μη ελέγξιμο σύστημα του οποίου το μη ελέγξιμο μέρος έχει όλες τις ιδιοτιμές του ευσταθείς μπορεί να σταθεροποιηθεί μεταφέροντας (μέσω ανάδρασης του ανύσματος κατάστασης) τις ελέγξιμες αλλά ασταθείς ιδιοτιμές του στο ανοικτό αριστερό ημι-επίπεδο $\mathbb{C}^{-}$.

Σταθεροποιήσιμο σύστημα (4)

Ένα σύστημα όπως το (2) είναι ελέγξιμο αν και μόνο αν

$$rank[sI_n - A \quad B] = n, \forall s \in sp(A)$$

όπου $sp(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} \in \mathbb{C}$ είναι το σύνολο των ιδιοτιμών του A.

Μία ιδιοτιμή λ_i του A είναι αποσυζευκτικό μηδενικό εισόδου του συστήματος (2) αν

$$rank[\lambda_i I_n - A \quad B] < n$$

Δηλαδή τα αποσυζευκτικά μηδενικά εισόδου του συστήματος είναι οι μη ελέγξιμες ιδιοτιμές του A.

Σταθεροποιήσιμο σύστημα (5)

Αν τα αποσυζευκτικά μηδενικά εισόδου του συστήματος είναι ευσταθή, βρίσκονται δηλαδή εντός του ανοικτού αριστερού ημι-επιπέδου $\mathbb{C}^{-}$, τότε το σύστημα είναι **σταθεροποιήσιμο**.

Με άλλα λόγια έχουμε την παρακάτω πρόταση.

Πρόταση

Πρόταση. Ένα σύστημα, όπως το (2), είναι σταθεροποιήσιμο αν και μόνο αν όλα τα αποσυζευκτικά μηδενικά εισόδου (αν υπάρχουν) βρίσκονται στο ανοικτό αριστερό ημι-επίπεδο $\mathbb{C}^{-}$ (είναι ευσταθή).

Ισοδύναμα

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \text{ **είναι σταθεροποιήσιμο** } \Leftrightarrow$$
$$rank[s_0 I_n - A \quad B] = n, \forall s_0 \in \bar{\mathbb{C}}^{+} := \{s \in \mathbb{C}, Re(s) > 0\}$$

(Δηλαδή το σύστημα δεν έχει ασταθή αποσυζευκτικά μηδενικά εισόδου.)

Βιβλιογραφία

- Βαρδουλάκης Α.Ι.Γ., 2012*, Εισαγωγή στην Μαθηματική Θεωρία Σημάτων, Συστημάτων και Ελέγχου, Τόμος Β. Μοντέρνα Θεωρία Ελέγχου.* Εκδόσεις Τζιόλα*.*
- Antsaklis P. and Michel A.N., 1977, *Linear Systems*, The McGraw-Hill Companies Inc. New York.
- Charles E., Donald G., James L., Melsa J., Rohrs C., Schultz D., 1996, *Γραμμικά συστήματα αυτομάτου ελέγχου*, Εκδόσεις Τζιόλα.
- Chen C.T., 1970, *Introduction to Linear System Theory*, Holt, Renehart and Winston Inc. New York.
- Kailath T., 1980, *Linear Systems*, Prentice Hall.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Νικόλαος Καραμπετάκης. «Μοντέρνα Θεωρία Ελέγχου. Ενότητα 18. Ασυμπτωτική ευστάθεια και σταθεροποιησιμότητα γραμμικών συστημάτων». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

http://eclass.auth.gr/courses/OCRS431/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου
Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2014-2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης