ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Κλασσική Θεωρία Ελέγχου

Ενότητα 6: Αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace

Νίκος Καραμπετάκης
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα Ενότητας

- Τεχνικές υπολογισμού του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace ρητών συναρτήσεων.

Σκοποί Ενότητας

- Εξοικείωση με τις τεχνικές υπολογισμού του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace ρητών συναρτήσεων.

Αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace

Αν το σήμα $x(t)$ έχει μετασχηματισμό Laplace:

$$X(s) = \int_{t=-\infty}^{t=\infty} x(t)e^{-st}dt$$

τότε το σήμα $x(t)$ μπορεί να υπολογιστεί από τον $X(s)$ μέσω του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{s=c-j\infty}^{s=c+j\infty} X(s)e^{st}ds\,,(1)$$

όπου, για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος, ο δρόμος $s = c + j\infty$ πρέπει να βρίσκεται εντός της περιοχής σύγκλισης του μετασχηματισμού Laplace. Συνήθως το ολοκλήρωμα (1) είναι δύσκολο να υπολογιστεί .

Πίνακας μετασχηματισμού Laplace

$\boldsymbol{f(t)}$	$\boldsymbol{F(s)}$
$\boldsymbol{\delta(t)}$	1
$\boldsymbol{u(t)}$	$\frac{1}{s}$
$\boldsymbol{tu(t)}$	$\frac{1}{s^2}$
$\boldsymbol{t^n u(t)}$	$\frac{n!}{s^n + 1}$
$\boldsymbol{e^{-at}u(t)}$	$\frac{1}{s + a}$
$\boldsymbol{sin(\omega t)u(t)}$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\boldsymbol{cos(\omega t)u(t)}$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$

Ιδιότητες μετασχηματισμού Laplace (1)

$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_{0-}^{\infty} f(t) e^{-st} dt$	**Ορισμός**
$\mathcal{L}[kf(t)] = kF(s)$	**Γραμμικότητα**
$\mathcal{L}[f_1(t) + f_2(t)] = F_1(s) + F_2(s)$	**Γραμμικότητα**
$\mathcal{L}[e^{-at} f(t)] = F(s+a)$	**Ολίσθηση συχνότητας**
$\mathcal{L}[f(t-T)] = e^{-sT} F(s)$	**Ολίσθηση χρόνου**
$\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$	**Κλιμάκωση χρόνου**
$\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = sF(s) - f(0-)$	**Παραγώγιση**

Ιδιότητες μετασχηματισμού Laplace (2)

$\mathcal{L}\left[\frac{d^2 f}{dt^2}\right] = s^2 F(s) - sf(0-) - f'(0-)$	**Δεύτερη παράγωγος**
$\mathcal{L}\left[\frac{d^n f}{dt^n}\right] = s^n F(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k} f^{k-1}(0-)$	**Γενική παράγωγος**
$\mathcal{L}\left[\int_{0-}^{t} f(\tau)d\tau\right] = \frac{F(s)}{s}$	**Ολοκλήρωση**
$f(\infty) = \lim_{s\to 0} sF(s)$	**Θεώρημα Τελικής τιμής**
$f(0+) = \lim_{s\to \infty} sF(s)$	**Θεώρημα Αρχικής τιμής**

Αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace ρητών συναρτήσεων

Ο υπολογισμός του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace είναι απλός, όταν ο $X(s)$ είναι **ρητή συνάρτηση**.

Έστω

$$\mathbb{R}[s] \coloneqq \{p(s) = p_q s^q + p_{q-1} s^{q-1} + .. + p_1 s + p_0, q \in \mathbb{Z}^+ = \{0,1,2,\dots\}, p_i \in \mathbb{R}, i = 0,1,..,q\}$$

το σύνολο (δακτύλιος) των **πολυωνύμων** με πραγματικούς συντελεστές και

$$\mathbb{R}(s) \coloneqq \left\{t(s) = \frac{b(s)}{a(s)}, a(s), b(s) \in \mathbb{R}[s], a(s) \neq 0\right\}$$

το σύνολο (σώμα) των **πραγματικών ρητών συναρτήσεων**.

Το σύνολο των κανονικών (proper) πραγματικών ρητών συναρτήσεων

Π.χ. $t_1(s) = \frac{2s^2+3s+6}{4s+2} \in \mathbb{R}(s), t_2(s) = \frac{3s^2+5s+7}{s^3+5s} \in \mathbb{R}(s),$

$$t_3(s) = 4s + 1 \in \mathbb{R}[s]$$

Το σύνολο (δακτύλιος) των **κανονικών (proper) πραγματικών ρητών** συναρτήσεων

$$\mathbb{R}_{pr}(s) := \left\{ t(s) = \frac{b(s)}{a(s)} \in \mathbb{R}(s), a(s) \neq 0, dega(s) \geq degb(s) \right\}$$

π.χ.

$$t_1(s) = \frac{2s^2+3s+6}{4s+2} \notin \mathbb{R}_{pr}(s), t_2(s) = \frac{3s^2+5s+7}{s^3+5s} \in \mathbb{R}_{pr}(s),$$

$$t_3(s) = 4s + 1 \notin \mathbb{R}_{pr}(s)$$

Μηδενικά πολυωνύμου (1)

Έστω $x(t) \leftrightarrow X(s)$

$$X(s) = \frac{b(s)}{a(s)} \in \mathbb{R}(s)$$

$$b(s) = b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0 \in \mathbb{R}[s]$$

$$a(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 \in \mathbb{R}[s]$$

Έστω

$$p_1, p_2, \ldots, p_n$$

οι n ρίζες της εξίσωσης

$$a(s) = 0$$

Μηδενικά πολυωνύμου (2)

Το πολυώνυμο $a(s)$ γράφεται

$$a(s) = a_n(s - p_1)(s - p_2)\ldots(s - p_n)$$

Οι n ρίζες $p_1, p_2, \ldots, p_n \in \mathbb{C}$ της εξίσωσης $a(s) = 0$ ονομάζονται ***μηδενικά*** του πολυωνύμου $a(s)$.

Πόλοι της ρητής συνάρτησης

Πόλοι της ρητής συνάρτησης

$$X(s) = \frac{b(s)}{a(s)} \in \mathbb{R}(s)$$

είναι τα μηδενικά του παρανομαστή $a(s)$.

Μηδενικά της ρητής συνάρτησης $X(s)$ είναι τα μηδενικά του αριθμητή $b(s)$.

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace μιας ρητής συνάρτησης μπορεί να υπολογιστεί αναπτύσσοντας τη ρητή συνάρτηση σε άθροισμα μερικών κλασμάτων.

Παραδοχή

Στα παρακάτω κάνουμε την παραδοχή ότι η ρητή συνάρτηση

$$X(s)=\frac{b(s)}{a(s)}\in\mathbb{R}_{pr}(s)$$

είναι αυστηρά κανονική $\Leftrightarrow deg a(s) > deg b(s)$

1. Διακριτοί πόλοι

Αν οι πόλοι $p_1, p_2, \dots, p_n$ της $X(s)$ είναι διακριτοί

$$p_i \neq p_j, i \neq j$$

τότε

$$X(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b(s)}{a_n(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)}$$
$$= \frac{c_1}{(s-p_1)} + \frac{c_2}{(s-p_2)} + \cdots + \frac{c_n}{(s-p_n)}$$

όπου

$$c_i = [(s-p_i)X(s)]_{s=p_i}, i = 1,2, \dots, n$$

διότι

$$(s-p_i)X(s) = c_i + \sum_{j=1, j\neq i}^{n} c_j \frac{s-p_i}{s-p_j}$$

Πραγματικοί πόλοι $p_i \in \mathbb{R}$

Αν $p_i \in \mathbb{R}$, τότε $c_i \in \mathbb{R}$

και επειδή

$$\frac{c_i}{(s-p_i)} \leftrightarrow c_i e^{p_i t}$$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της $X(s)$ είναι

$$x(t) = c_1 e^{p_1 t} + c_2 e^{p_2 t} + \cdots + c_n e^{p_n t}$$

Παράδειγμα 1 (1)

Έστω

$$X(s) = \frac{s+2}{s^3+4s^2+3s} \in \mathbb{R}_{pr}(s)$$

$$a(s) = s^3 + 4s^2 + 3s = s(s+1)(s+3) \Rightarrow$$

$$p_1 = 0, p_2 = -1, p_3 = -3$$

$$X(s) = \frac{c_1}{(s-0)} + \frac{c_2}{(s+1)} + \frac{c_3}{(s+3)}$$

$$\downarrow$$

$$x(t) = c_1 + c_2 e^{-t} + c_3 e^{-3t}, t \geq 0$$

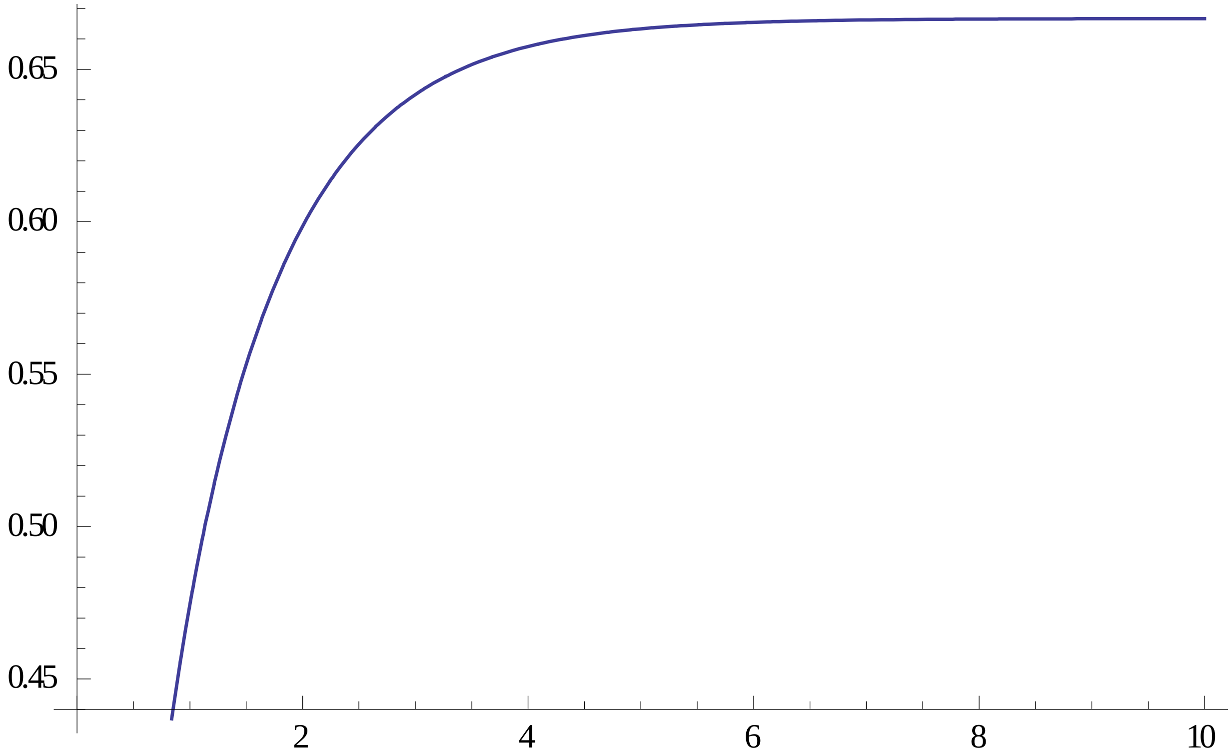
όπου

Παράδειγμα 1 (2)

- $c_1 = [(s-0)X(s)]_{s=0} = \left.\frac{s+2}{(s+1)(s+3)}\right|_{s=0} = \frac{2}{3},$
- $c_2 = [(s+1)X(s)]_{s=-1} = \left.\frac{s+2}{s(s+3)}\right|_{s=-1} = -\frac{1}{2},$
- $c_3 = [(s+3)X(s)]_{s=3} = \left.\frac{s+2}{s(s+1)}\right|_{s=-3} = -\frac{1}{6}$

$$x(t) = \frac{2}{3} - \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{6}e^{-3t}$$

Παράδειγμα 1 (3)



2. Διακριτοί πόλοι και δύο ή περισσότεροι μιγαδικοί πόλοι (1)

Όταν οι πόλοι $p_1, p_2, \dots, p_n$ της $X(s)$ είναι πραγματικοί διακριτοί και δύο ή περισσότεροι πόλοι είναι συζυγείς μιγαδικοί.

Έστω

$$p_1 = \sigma_1 + j\omega_1, p_2 = \bar{p}_1 = \sigma_1 - j\omega_1, \sigma_1, \omega_1 \in \mathbb{R}, \omega_1 \neq 0$$

Τότε

$$X(s) = \frac{c_1}{s - p_1} + \frac{\bar{c}_1}{s - p_2} + \frac{c_3}{s - p_3} + \cdots + \frac{c_n}{s - p_n}$$

$$x(t) = c_1 e^{p_1 t} + \bar{c}_1 e^{p_2 t} + c_3 e^{p_3 t} + \cdots + c_n e^{p_n t}$$

Μιγαδικοί πόλοι (1)

$$X(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{s+1}{s^3 + 2s^2 + 2s} \in \mathbb{R}_{pr}(s)$$

Έχουμε έναν πραγματικό και δύο μιγαδικούς πόλους.

$$a(s) = s^3 + 2s^2 + 2s = s(s^2 + 2s + 2)$$

Ανάλυση σε άθροισμα μερικών κλασμάτων:

$$X(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{s+1}{s^3 + 2s^2 + 2s} = \frac{a_1}{(s-0)} + \frac{a_2 s + a_3}{s^2 + 2s + 2}$$

$$= \frac{a_1(s^2 + 2s + 2) + s(a_2 s + a_3)}{s(s^2 + 2s + 2)}$$

$$= \frac{(a_1 + a_2)s^2 + (2a_1 + a_3)s + 2a_1}{s(s^2 + 2s + 2)}$$

Μιγαδικοί πόλοι (2)

Εξίσωση συντελεστών:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 0, \\ 2a_1 + a_3 = 1, \\ 2a_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = \dfrac{1}{2}, \\ a_2 = -\dfrac{1}{2}, \\ a_3 = 0 \end{cases}$$

$$X(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{s+1}{s^3 + 2s^2 + 2s} = \frac{1}{2}\frac{1}{s} - \frac{1}{2}\frac{s}{s^2 + 2s + 2} =$$

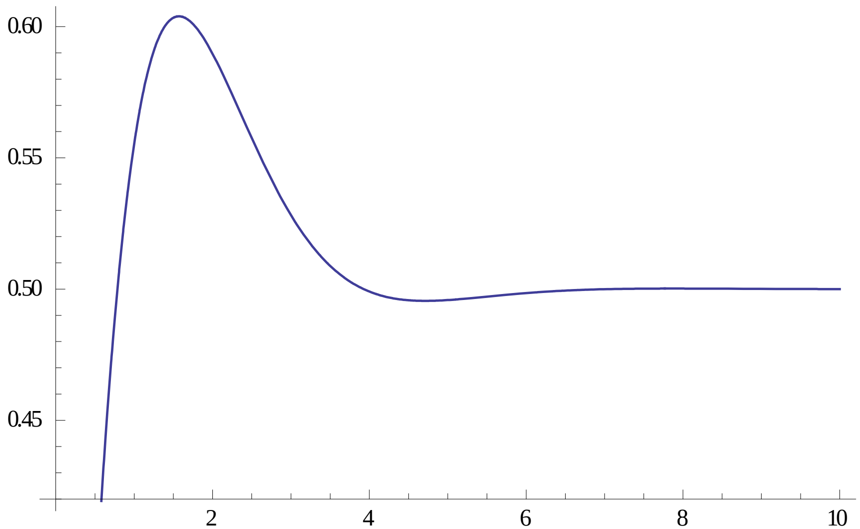
$$= \frac{1}{2}\frac{1}{s} - \frac{1}{2}\frac{s}{(s+1)^2 + 1} =$$

Μιγαδικοί πόλοι (3)

$$\frac{1}{2}\frac{1}{s} - \frac{1}{2}\frac{(s+1)}{(s+1)^2+1} + \frac{1}{2}\frac{(s+1)}{(s+1)^2+1}$$

$$\downarrow$$

$$x(t) = \frac{1}{2}u(t) - \frac{1}{2}\cos(t)\, e^{-t} + \frac{1}{2}\sin(t)\, e^{-t}$$



Μιγαδικοί πόλοι (4)

$$X(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{s+1}{s^3+2s^2+2s} \in \mathbb{R}_{pr}(s)$$

Έχουμε έναν πραγματικό και δύο μιγαδικούς πόλους.

$$a(s) = s^3+2s^2+2s = s(s^2+2s+2)$$
$$= s(s+1+j)(s+1-j)$$

Ανάλυση σε άθροισμα μερικών:

$$X(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{s+1}{s^3+2s^2+2s} = \frac{a_1}{s} + \frac{a_2}{s+1+j} + \frac{a_3}{s+1-j}$$

$$a_1 = s\left(\frac{s+1}{s(s+1+j)(s+1-j)}\right)_{s=0} = \left(\frac{s+1}{s(s+1+j)(s+1-j)}\right)_{s=0}$$

Μιγαδικοί πόλοι (5)

$$\Rightarrow a_1 = \frac{1}{(1+j)(1-j)} = \frac{1}{2}$$

$$a_2 = (s+1+j)\left(\frac{s+1}{s(s+1+j)(s+1-j)}\right)_{s=-1-j}$$

$$= \left(\frac{s+1}{s(s+1-j)}\right)_{s=-1-j} = \frac{-1-j+1}{(-1-j)(-1-j+1-j)}$$

$$= \frac{-j}{-2j(-1-j)} = \frac{1}{2}\frac{-1+j}{2}$$

$$a_3 = (s+1-j)\left(\frac{s+1}{s(s+1+j)(s+1-j)}\right)_{s=-1+j} =$$

Μιγαδικοί πόλοι (6)

$$= \left(\frac{s+1}{s(s+1+j)}\right)_{s=-1+j} = \frac{-1-j+1}{(-1+j)(-1+j+1+j)}$$

$$= \frac{j}{2j(-1+j)} = \frac{1}{2}\frac{-1-j}{2} = \bar{a}_2$$

$$X(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{s+1}{s^3+2s^2+2s} = \frac{1}{2}\frac{1}{s} + \frac{1}{4}\frac{(-1+j)}{s+1+j} + \frac{1}{4}\frac{(-1-j)}{s+1-j}$$

$$\downarrow$$

$$x(t) = \frac{1}{2}u(t) + \frac{1}{4}(-1+j)e^{(-1-j)t} + \frac{1}{4}(-1-j)e^{(-1+j)t}$$

?

Μιγαδικοί πόλοι (7)

$$\begin{cases} c = -1 + j \\ |c| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2} \\ \arg(c) = ArcTan\left(\dfrac{1}{-1}\right) = \dfrac{3\pi}{4} \end{cases} \rightarrow c = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + jsin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$$

$$\begin{cases} \bar{c} = -1 - j \\ |\bar{c}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2} \\ \arg(\bar{c}) = ArcTan\left(\dfrac{-1}{-1}\right) = \dfrac{\pi}{4} \ \eta \ -\dfrac{3\pi}{4} \end{cases} \rightarrow \bar{c} = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + jsin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) - jsin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$$

Μιγαδικοί πόλοι (8)

$$x(t) = \frac{1}{2}u(t) + \frac{1}{4}(-1+j)e^{(-1-j)t} + \frac{1}{4}(-1-j)e^{(-1+j)t} =$$

$$\frac{1}{2}u(t) + \frac{1}{4}(-1+j)e^{-t}e^{-jt} + \frac{1}{4}(-1-j)e^{-t}e^{jt} =$$

$$\frac{1}{2}u(t) + \frac{1}{4}e^{-t}\{(-1+j)e^{-jt} + (-1-j)e^{jt}\} =$$

$$\frac{1}{2}u(t) + \frac{1}{4}e^{-t}\left\{\begin{array}{c} \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + jsin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)(\cos(t) - jsin(t)) \\ +\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) - jsin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)(\cos(t) + jsin(t)) \end{array}\right\}$$

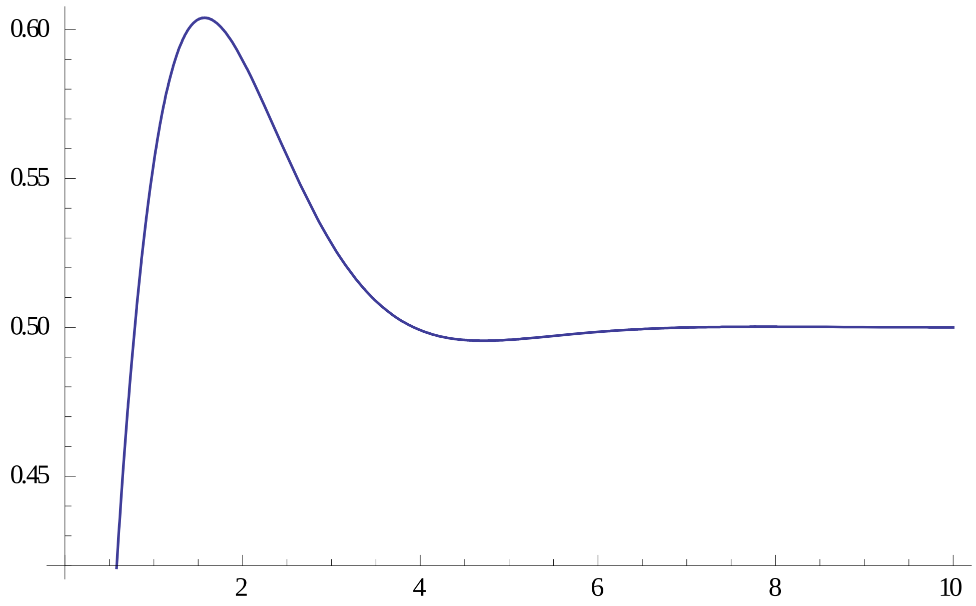
Μιγαδικοί πόλοι (9)

$$
= \frac{1}{2}u(t) + \frac{1}{4}e^{-t}\left\{\begin{array}{l} \sqrt{2}\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\cos(t) - j\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\sin(t) + \\ jsin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\cos(t) + \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\sin(t) \end{pmatrix} \\ +\sqrt{2}\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\cos(t) + j\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\sin(t) \\ -jsin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\cos(t) + \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)sin(t) \end{pmatrix} \end{array}\right\}
$$

$$
= \frac{1}{2}u(t) + \frac{2\sqrt{2}}{4}e^{-t}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\cos(t) + \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\sin(t)\right)
$$

$$
= \frac{1}{2}u(t) + \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-t}\cos\left(t - \frac{3\pi}{4}\right)
$$

Μιγαδικοί πόλοι (10)



2. Διακριτοί πόλοι και δύο ή περισσότεροι μιγαδικοί πόλοι (2)

Έστω

$$c_1 = a + j\beta \Rightarrow \bar{c}_1 = a - j\beta \Rightarrow$$

$$|c_1| = \sqrt{a^2 + \beta^2}, \varphi = \arctan\frac{\beta}{\alpha}$$

Άρα

$$c_1 = |c_1|cos\varphi + j|c_1|sin\varphi = |c_1|(cos\varphi + sin\varphi)$$

$$\bar{c}_1 = |c_1|cos\varphi - j|c_1|sin\varphi = |c_1|(cos\varphi - sin\varphi)$$

2. Διακριτοί πόλοι και δύο ή περισσότεροι μιγαδικοί πόλοι (3)

- $c_1 e^{p_1 t} + \bar{c}_1 e^{p_2 t} = c_1 e^{(\sigma_1 + j\omega_1)t} + \bar{c}_1 e^{(\sigma_1 - j\omega_1)t}$

$$= c_1 e^{\sigma_1 t} c_1 e^{j\omega_1 t} + \bar{c}_1 e^{\sigma_1 t} c_1 e^{-j\omega_1 t}$$

$$= |c_1|(cos\varphi + jsin\varphi) e^{\sigma_1 t} e^{j\omega_1 t}$$
$$+ |c_1|(cos\varphi - jsin\varphi) e^{\sigma_1 t} e^{-j\omega_1 t}$$

$$= |c_1| e^{\sigma_1 t} (cos\varphi + jsin\varphi)\big(\cos(\omega_1 t) + jsin(\omega_1 t)\big)$$
$$+ |c_1| e^{\sigma_1 t} (cos\varphi - jsin\varphi)\big(\cos(\omega_1 t) - jsin(\omega_1 t)\big) =$$

2. Διακριτοί πόλοι και δύο ή περισσότεροι μιγαδικοί πόλοι (4)

$$= |c_1|e^{\sigma_1 t}\big(cos\varphi \cos(\omega_1 t) + jcos\varphi sin(\omega_1 t) + jsin\varphi \cos(\omega_1 t) - sin\varphi sin(\omega_1 t)\big) + |c_1|e^{\sigma_1 t}\big(cos\varphi \cos(\omega_1 t) - jcos\varphi sin(\omega_1 t) - jsin\varphi \cos(\omega_1 t) - sin\varphi sin(\omega_1 t)\big)$$

$$= 2|c_1|e^{\sigma_1 t} \cos(\omega_1 t + \varphi)$$

Επομένως

$$x(t) = c_1 e^{p_1 t} + \bar{c}_1 e^{p_2 t} + c_3 e^{p_3 t} + \cdots + c_n e^{p_n t} = 2|c_1|e^{\sigma_1 t} \cos(\omega_1 t + \varphi) + c_3 e^{p_3 t} + \cdots + c_n e^{p_n t}$$

Παράδειγμα 2 (1)

Έστω

$$X(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{s^2 - 2s + 1}{s^3 + 3s^2 + 4s + 2} \in \mathbb{R}_{pr}(s)$$

$$a(s) = s^3 + 3s^2 + 4s + 2 = (s + 1 + j)(s + 1 - j)(s + 1)$$

$$p_1 = -1 + j, p_2 = \bar{p}_1 = -1 - j, p_3 = -1$$

$$X(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{s + 1}{s^3 + 2s^2 + 2s} = \frac{c_1}{s + 1 - j} + \frac{c_2}{s + 1 + j} + \frac{c_3}{s + 1}$$

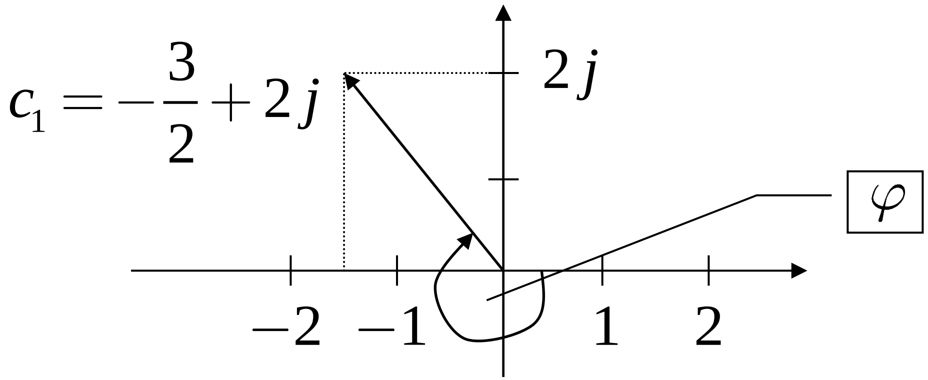
$$c_3 = [(s + 1)X(s)]_{s=-1} = \left.\frac{s^2 - 2s + 1}{s^2 + 2s + 2}\right|_{s=-1} = 4$$

Παράδειγμα 2 (2)

$$c_1 = (s+1-j)\,X(s)\Big|_{s=-1+j} = \left(\frac{s^2-2s+1}{(s+1-j)(s+1)}\right)_{s=-1+j} = -\frac{3}{2}+2j$$

$$|c_1| = \sqrt{\frac{9}{4}+4} = \frac{5}{2},$$

$$\varphi = 180 + \arctan\left(-\frac{4}{3}\right) = 126{,}87$$



$$x(t) = 2|c_1|e^{\sigma_1 t}\cos(\omega_1 t+\varphi) + c_3 e^{p_3 t}$$
$$= 2\frac{5}{2}e^{-t}\cos(t+126{,}87) + 4e^{-t}$$

3. Επαναλαμβανόμενοι πόλοι (1)

$$X(s) = \frac{5s-1}{s^3-3s-2} = \frac{5s-1}{(s+1)^2(s-2)}$$
$$= \frac{c_1}{s+1} + \frac{c_2}{(s+1)^2} + \frac{c_3}{s-2}$$
$$(s+1)^2 X(s) = (s+1)^2 \left(\frac{c_1}{s+1} + \frac{c_2}{(s+1)^2} + \frac{c_3}{s-2}\right)$$
$$= c_1(s+1) + c_2 + \frac{c_3}{s-2}(s+1)^2$$

- $[(s+1)^2 X(s)]|_{s=-1} = c_2$

3. Επαναλαμβανόμενοι πόλοι (2)

$$\frac{d}{ds}[(s+1)^2 X(s)] = \frac{d}{ds}\left[c_1(s+1) + c_2 + \frac{c_3}{s-2}(s+1)^2\right]$$
$$= c_1 + \frac{c_3 2(s+1)(s-2) - c_3(s+1)^2}{(s-2)^2}$$

- $\left[\frac{d}{ds}[(s+1)^2 X(s)]\right]_{s=-1} = c_1$

$$(s-2)X(s) = (s-2)\left(\frac{c_1}{s+1} + \frac{c_2}{(s+1)^2} + \frac{c_3}{s-2}\right)$$
$$= \frac{c_1(s-2)}{s+1} + \frac{c_2(s-2)}{(s+1)^2} + c_3$$

- $(s-2)X(s)_{s=2} = c_3$

3. Επαναλαμβανόμενοι πόλοι (3)

Έστω ότι ο πόλος p_1 έχει πολλαπλότητα r και οι υπόλοιποι $p_{r+1}, p_{r+2}, \ldots, p_n$ πόλοι είναι διακριτοί

$$a(s) = a_n (s - p_1)^r (s - p_{r+1}) \ldots (s - p_n)$$

$$X(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b(s)}{a_n (s - p_1)^r (s - p_{r+1}) \ldots (s - p_n)}$$

$$= \frac{c_1}{s - p_1} + \frac{c_2}{(s - p_1)^2} + \cdots + \frac{c_r}{(s - p_1)^r} + \frac{c_{r+1}}{s - p_{r+1}} + \cdots + \frac{c_n}{s - p_n}$$

$$c_i = [(s - p_i) X(s)]_{s = p_i}, i = r + 1, r + 2, \ldots, n$$

3. Επαναλαμβανόμενοι πόλοι (4)

$$c_{r-i} = \frac{1}{i!}\left[\frac{d^i}{ds^i}(s-p_i)^r X(s)\right]_{s=p_i}, i = 1,2,\dots,r-1$$

- αν $p_i \in \mathbb{R}, i = 1,2,\dots,n \; \frac{1}{(s-p_i)^q} \leftrightarrow \frac{t^{q-1}}{(q-1)!} e^{p_i t}, q = 1,2,3,\dots$

Παράδειγμα 3

$$X(s)=\frac{5s-1}{s^3-3s-2}=\frac{5s-1}{(s+1)^2(s-2)}=\frac{c_1}{s+1}+\frac{c_2}{(s+1)^2}+\frac{c_3}{s-2}$$

$$c_1=\left[\frac{d}{ds}[(s+1)^2X(s)]\right]_{s=-1}=\left[\frac{d}{ds}\left(\frac{5s-1}{s-2}\right)\right]_{s=-1}$$

$$=\left.\frac{-9}{(s-2)^2}\right|_{s=-1}=-1$$

$$c_2=[(s+1)^2X(s)]_{s=-1}=\left.\frac{5s-1}{s-2}\right|_{s=-1}=2$$

$$c_3=[(s-2)X(s)]_{s=2}=\left.\frac{5s-1}{(s+1)^2}\right|_{s=2}=1$$

$$x(t)=-e^{-t}+2te^{-t}+e^{2t}$$

Γενικά

Αν η αυστηρά κανονική ρητή συνάρτηση $X(s)=\frac{b(s)}{a(s)}$, $deg a(s) > deg b(s)$ **έχει:**	**Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace x(t) της X(s) έχει όρο της μορφής :**
Απλό πραγματικό πόλο p	$ce^{pt}, c \in \mathbb{R}$
Πραγματικό πόλο p με πολλαπλότητα 2	$c_1e^{pt} + c_2te^{pt}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$
Πραγματικό πόλο p με πολλαπλότητα r	$c_1e^{pt} + c_2te^{pt} + \cdots + c_rt^{r-1}e^{pt}$, $c_1, c_2, .., c_r \in \mathbb{R}$
Απλό μιγαδικό πόλο $p = \sigma \pm j\omega$	$ce^{\sigma t}\cos(\omega t + \varphi), c, \varphi \in \mathbb{R}$
Μιγαδικό πόλο $p = \sigma \pm j\omega$ με πολλαπλότητα 2	$c_1e^{\sigma t}\cos(\omega t + \varphi_1) + c_2te^{\sigma t}\cos(\omega t + \varphi_2)$, $c_1, c_2, \varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R}$

Παράδειγμα 4

$$X(s) = \frac{1}{s(s+1)(s-4)^2(s+2-3j)(s+2+3j)}$$

$p_1 = 0, p_2 = -1, p_3 = 4, p_4 = 4, p_5 = -2+3j, p_6 = \bar{p}_5 = -2-3j$

$$x(t) = c_1 + c_2 e^{-t} + c_3 e^{4t} + c_4 t e^{4t} + c_5 e^{-2t}\cos(3t+\varphi)$$

$c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, \varphi \in \mathbb{R}$

Συμπέρασμα: Η μορφή του σήματος $x(t)$ εξαρτάται μόνο από τους πόλους της $X(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$.

(πόλοι της $X(s)$=ρίζες του παρανομαστή $a(s)$)

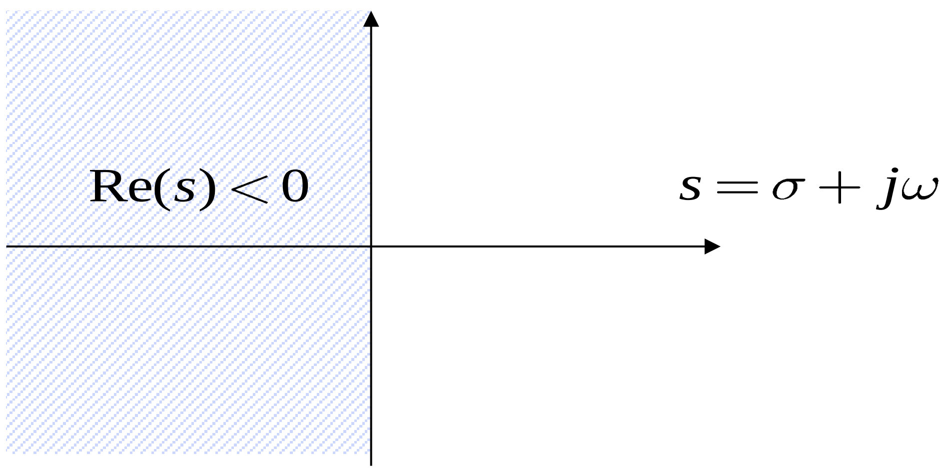
Δεν εξαρτάται από τα μηδενικά της $X(s)$.

(μηδενικά της $X(s)$=ρίζες του αριθμητή $b(s)$)

Συνέπεια (1)

Συνέπεια των παραπάνω είναι ότι η συμπεριφορά του σήματος $x(t)$, όταν ο χρόνος $t \to \infty$ εξαρτάται μόνο από τους πόλους της $X(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$ και

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = 0 \Leftrightarrow Re(p_i) < 0, \forall i = 1,2, \dots, n$$



Συνέπεια (2)

Αν ένας πόλος της $X(s)$ είναι ο $p_1 = 0$ και όλοι οι άλλοι πόλοι $p_i \subset Re(s) < 0$, αν δηλαδή

$$X(s) = \frac{b(s)}{sa_1(s)} = \frac{c_1}{s} + \frac{b_1(s)}{a_1(s)}$$

- $a_1(s) = (s - p_2)^{r_1}(s - p_3)^{r_2} \dots (s - p_n)^{r_{n-1}},$

$$p_i \neq 0, Re(p_i) < 0, i = 2,3, \dots, n$$

- $\lim_{t \to +\infty} x(t) = c_1 = [sX(s)]_{s=0} = \left.\frac{b(s)}{a_1(s)}\right|_{s=0} = \frac{b(0)}{a_1(0)} = \frac{b_0}{(-p_2)^{r_1}(-p_3)^{r_2} \dots (-p_n)^{r_{n-1}}} \in \mathbb{R}$

Παράδειγμα 5

$$X(s) = \frac{2s^2 - 3s + 4}{s^3 + 3s^2 + 2s} = \frac{2s^2 - 3s + 4}{s(s+1)(s+2)}$$

$$p_1 = 0, p_2 = -1, p_3 = -2$$

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = [sX(s)]_{s=0} = \left.\frac{2s^2 - 3s + 4}{(s+1)(s+2)}\right|_{s=0} = 2$$

Βιβλιογραφία

- Βαρδουλάκης Α.Ι., 2011, *Εισαγωγή στη Μαθηματική Θεωρία Σημάτων, Συστημάτων και Ελέγχου*, Τόμος Α: Κλασική Θεωρία Ελέγχου, ΕΚΔΟΣΕΙΣ Α. ΤΖΙΟΛΑ & ΥΙΟΙ Α.Ε.
- Alexander D. Poularikas, *Transforms and applications handbook* / editor, -- 3rd ed., CRC Press, Taylor & Francis Group (Chapter 5, Laplace Transforms, by Alexander D. Poularikas and Samuel Seely).

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Νικόλαος Καραμπετάκης. «Κλασσική Θεωρία Ελέγχου. Ενότητα 6: Αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

http://eclass.auth.gr/courses/OCRS432/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου
Θεσσαλονίκη, Χειμερινό εξάμηνο 2014-2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης