ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Κλασσική Θεωρία Ελέγχου

Ενότητα 10: Αλγεβρικά κριτήρια ευστάθειας

Νίκος Καραμπετάκης
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

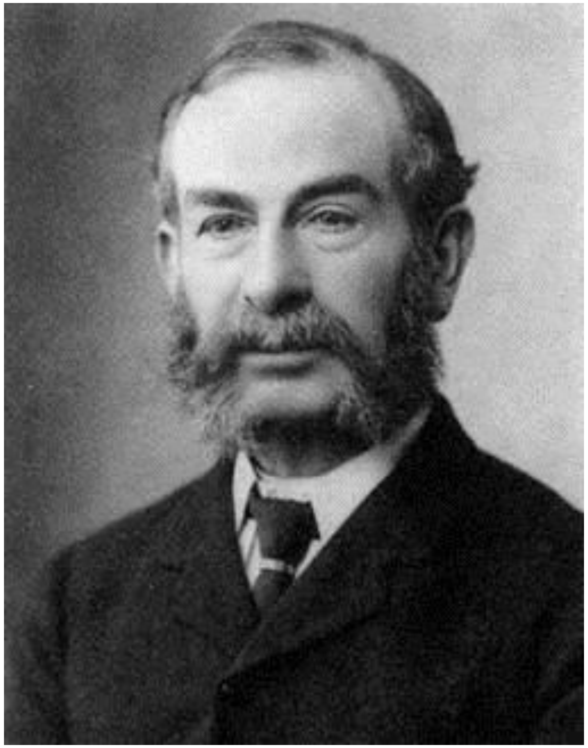
Περιεχόμενα Ενότητας

- Κριτήριο Ευστάθειας Routh-Hurwitz.
- Κριτήριο Ευστάθειας Lienard – Chipart.
- Μια διαφορετική εκδοχή του κριτηρίου Routh.
- Θεώρημα Kharitonov.

Σκοποί Ενότητας

- Παρουσίαση αλγεβρικών κριτηρίων ευστάθειας, στα οποία δεν είναι απαραίτητη η εύρεση των μηδενικών ενός πολυωνύμου προκειμένου να αποφανθούμε για την περιοχή στην οποία βρίσκονται.
- Μελέτη διαστηματικών πολυωνύμων και γενίκευση των παραπάνω κριτηρίων.

Edward John Routh (1831–1907)



Edward John Routh (1831–1907)
Εικόνα 1

Αναγκαία συνθήκη για να είναι ένα πολυώνυμο ευσταθές (1)

$$\left(s+b_1\right)\left(s+b_2\right) \longrightarrow b_1b_2+\left(b_1+b_2\right)s+s^2$$

$$\left(s+b_1\right)\left(s+b_2\right)\left(s+b_3\right) \longrightarrow b_1b_2b_3+(b_1b_2+b_1b_3+b_2b_3)s+(b_1+b_2+b_3)s^2+s^3$$

$$\left(s+b_1\right)\left(s+b_2\right)\left(\left(s+b_3\right)^2+w_3{}^2\right)$$

$$\downarrow$$

$$(b_1b_2b_3^2+b_1b_2w_3^2)+(2b_1b_2b_3+b_1b_3^2+b_2b_3^2+b_1w_3^2+b_2w_3^2)s+$$
$$+(b_1b_2+2b_1b_3+2b_2b_3+b_3^2+w_3^2)s^2+(b_1+b_2+2b_3)s^3+s^4$$

Αναγκαία συνθήκη για να είναι ένα πολυώνυμο ευσταθές (2)

Θεώρημα. Αν το πολυώνυμο $a(s)$ είναι ευσταθές, τότε $a_i > 0, i = 1,2, \dots, n$.

$$a(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n, a_0 > 0.$$

Κριτήριο Routh

Μία <u>αναγκαία</u> συνθήκη για την ύπαρξη ριζών στο αριστερό μιγαδικό επίπεδο ενός πολυωνύμου

$$a(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n, a_0 > 0$$

είναι $a_i > 0$.

Επομένως μια <u>αναγκαία</u> συνθήκη για να είναι ένα σύστημα

$$(\Sigma): a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + \\ + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_0 x(t)$$

<u>ασυμπτωτικά ευσταθές</u> είναι $a_i > 0$.

Παράδειγμα 1

Βάσει του προηγούμενου κριτηρίου, το σύστημα

$$(\Sigma):\ \frac{d^2y(t)}{dt^2} - 5\frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = \frac{du(t)}{dt} - u(t)$$

είναι ασταθές γιατί $\alpha_2 = -5 < 0$.

Πίνακας Routh

Έστω το πολυώνυμο

$$a(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n, a_0 > 0$$

Σχηματίζω τον παρακάτω πίνακα βάσει των συντελεστών του πολυωνύμου $a(s)$.

Πίνακας Routh

$$\begin{array}{llll}
s^n & a_n & a_{n-2} & \ldots \\
s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & \ldots \\
s^{n-2} & b_{n-1} & b_{n-3} & \ldots \\
s^{n-3} & c_{n-1} & c_{n-3} & \ldots \\
\vdots & \vdots & & \\
s^0 & d_0 & &
\end{array}$$

$$b_{n-1} = -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{bmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{bmatrix}$$

$$b_{n-3} = -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{bmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-4} \end{bmatrix}$$

$$c_{n-3} = -\frac{1}{b_{n-1}} \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_{n-1} & b_{n-5} \end{bmatrix}$$

$$c_{n-1} = -\frac{1}{b_{n-1}} \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_{n-1} & b_{n-3} \end{bmatrix}$$

Θεώρημα (Routh) (1)

Σχηματίζω τον παρακάτω πίνακα βάσει των συντελεστών του πολυωνύμου $a(s)$.

Πίνακας Routh

s^n	a_n	a_{n-2}	…
s^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	…
s^{n-2}	b_{n-1}	b_{n-3}	…
s^{n-3}	c_{n-1}	c_{n-3}	…
$\vdots$	$\vdots$		
s^0	d_0		

Θεώρημα (Routh) <u>Ικανή</u> και <u>αναγκαία</u> συνθήκη τέτοια ώστε όλες οι ρίζες p_i του πολυωνύμου $a(s)$ να έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος ($Re(p_i) < 0$) είναι:

i. $a_i > 0$

ii. Τα στοιχεία της πρώτης στήλης του πίνακα Routh είναι αυστηρώς θετικά.

Θεώρημα (Routh) (2)

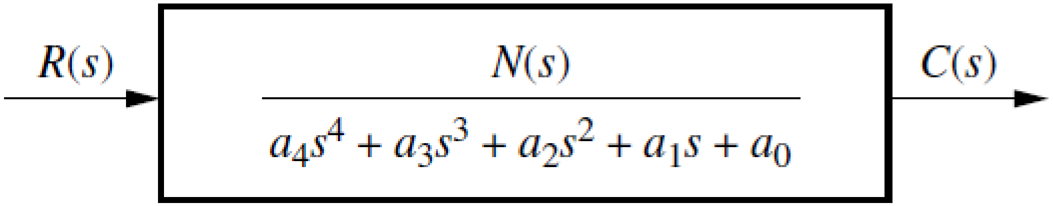
Σχηματίζω τον παρακάτω πίνακα βάσει των συντελεστών του πολυωνύμου $a(s)$.

Πίνακας Routh

s^n	a_n	a_{n-2}	…
s^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	…
s^{n-2}	b_{n-1}	b_{n-3}	…
s^{n-3}	c_{n-1}	c_{n-3}	…
$\vdots$	$\vdots$		
s^0	d_0		

Σημείωση: Το πλήθος της εναλλαγής προσήμων στην πρώτη στήλη του πίνακα Routh είναι ίσο με τον αριθμό των μηδενικών p_i του $a(s)$ που βρίσκονται στο δεξιό μιγαδικό επίπεδο

Παράδειγμα 2 (1)



s^4	a_4	a_2	a_0
s^3	a_3	a_1	0
s^2			
s^1			
s^0			

Παράδειγμα 2 (2)

$$R(s) \longrightarrow \boxed{\dfrac{N(s)}{a_4s^4 + a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0}} \longrightarrow C(s)$$

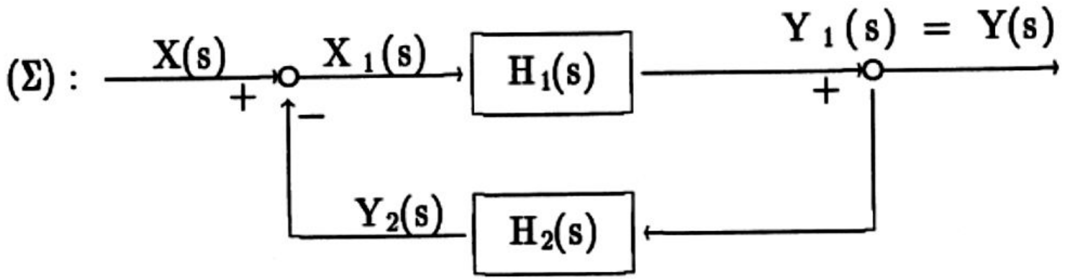
s^4	a_4	a_2	a_0
s^3	a_3	a_1	0
s^2	$\dfrac{-\begin{vmatrix} a_4 & a_2 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix}}{a_3} = b_1$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} a_4 & a_0 \\ a_3 & 0 \end{vmatrix}}{a_3} = b_2$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} a_4 & 0 \\ a_3 & 0 \end{vmatrix}}{a_3} = 0$
s^1	$\dfrac{-\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{b_1} = c_1$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} a_3 & 0 \\ b_1 & 0 \end{vmatrix}}{b_1} = 0$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} a_3 & 0 \\ b_1 & 0 \end{vmatrix}}{b_1} = 0$
s^0	$\dfrac{-\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & 0 \end{vmatrix}}{c_1} = d_1$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} b_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{vmatrix}}{c_1} = 0$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} b_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{vmatrix}}{c_1} = 0$

Περίπτωση 1

- **Περίπτωση 1.** Κανένα μηδενικό στην πρώτη στήλη.

Παράδειγμα 3: Δίνεται το παρακάτω σύστημα

όπου $\mathrm{H}_1(s) = \frac{1}{s^3+s^2+s+5}$ και $H_2(s) = 5$.



Είναι το παραπάνω σύστημα ασυμπτωτικά ευσταθές ναι ή όχι και γιατί;

Παράδειγμα 3 (1)

Λύση:

$$\left.\begin{array}{c} Y(s) = Y_1(s) = H_1(s)X_1(s) \\ X_1(s) = X(s) - H_2(s)Y(s) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$Y(s) = \frac{H_1(s)}{1 + H_1(s)H_2(s)} X(s)$$

και συνεπώς

$$H(s) = \frac{1}{s^3 + s^2 + s + 10}$$

Εφαρμόζω το κριτήριο Routh για το χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$\alpha(s) = s^3 + s^2 + s + 10$$

Παράδειγμα 3 (2)

$$\alpha(s) = s^3 + s^2 + s + 10$$

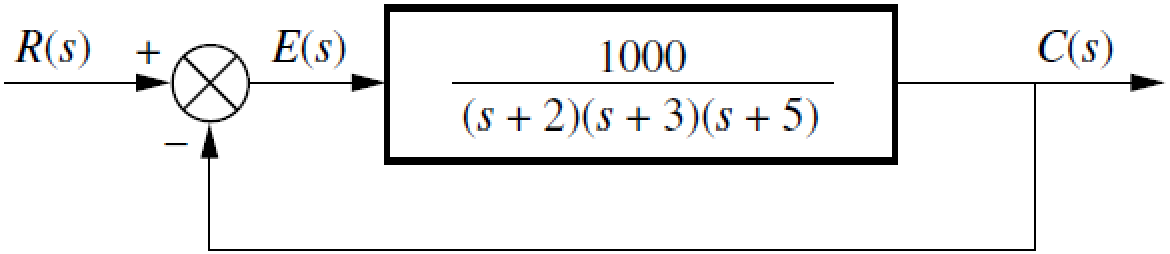
Έχω ότι $a_i > 0$.

Πίνακας Routh

$\boldsymbol{s^3}$	**1**	**1**
$\boldsymbol{s^2}$	1	10
$\boldsymbol{s^1}$	-9	0
$\boldsymbol{s^0}$	10	0

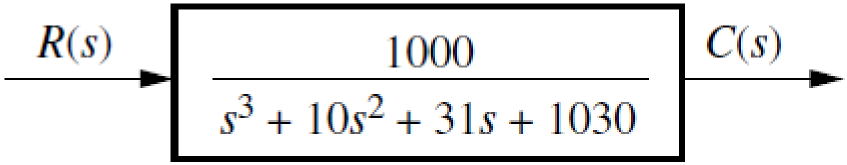
Παρατηρώ ότι παρόλο που έχω $\alpha_i > 0$, η πρώτη στήλη έχει ένα στοιχείο αρνητικό και συνεπώς έχω ρίζες στο δεξιό μιγαδικό επίπεδο. Το πλήθος των ριζών που βρίσκεται στο δεξιό μιγαδικό επίπεδο είναι ίσο με το πλήθος της εναλλαγής προσήμων στην πρώτη στήλη δηλαδή δύο. $(1 \rightarrow -9 \rightarrow 10)$. Το σύστημα είναι ασταθές.

Παράδειγμα 4 (1)



Είναι ασυμπτωτικά ευσταθές το παραπάνω σύστημα;

Συνάρτηση μεταφοράς κλειστού συστήματος:



Παράδειγμα 4 (2)

s^3	**1**	**31**	**0**
s^2	$\cancel{10}$ 1	$\cancel{1030}$ 103	0
s^1	$\frac{-\begin{vmatrix} 1 & 31 \\ 1 & 103 \end{vmatrix}}{1} = -72$	$\frac{-\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}}{1} = 0$	$\frac{-\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{1} = 0$
s^0	$\frac{-\begin{vmatrix} 1 & 103 \\ -72 & 0 \end{vmatrix}}{-72} = 103$	$\frac{-\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -72 & 0 \end{vmatrix}}{-72} = 0$	$\frac{-\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -72 & 0 \end{vmatrix}}{-72} = 0$

Άσκηση 1

Άσκηση: Δημιουργήστε τον πίνακα Routh για το παρακάτω πολυώνυμο και υπολογίστε πόσα μηδενικά του βρίσκονται στο δεξιό και πόσα στο αριστερό μιγαδικό επίπεδο.

$$P(s) = 3s^7 + 9s^6 + 6s^5 + 4s^4 + 7s^3 + 8s^2 + 2s + 6$$

Απάντηση: 4 στο δεξιό μιγαδικό επίπεδο και 3 στο αριστερό μιγαδικό επίπεδο.

Περίπτωση 2

- **Περίπτωση 2.** έχω ένα μηδενικό στην πρώτη στήλη.

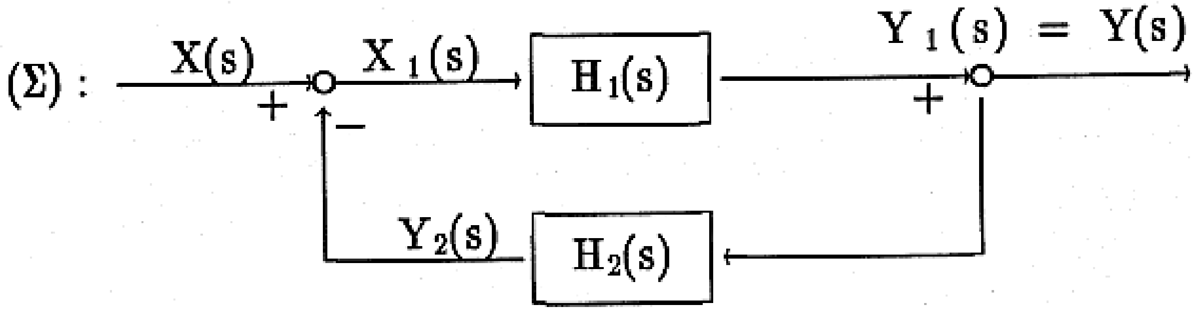
i. Σε αυτήν την περίπτωση πολλαπλασιάζω το πολυώνυμο $a(s)$ με τον παράγοντα $(s + a)$ όπου $a > 0$ και $-a$ δεν είναι ρίζα του $a(s)$.

ή

ii. Αντικαθιστώ το 0 με έναν θετικό αριθμό ε και συνεχίζω έτσι ώστε να συμπληρώσω τον πίνακα και ακολούθως αφήνω το ε να τείνει στο μηδέν και ελέγχω τα πρόσημα των στοιχείων της πρώτης στήλης.

Παράδειγμα 5 (1)

Δίνεται το παρακάτω σύστημα



όπου $H_1(s) = \frac{4s^2+11s+9}{s^5+2s^4+2s^3+2s+1}$ και $H_2(s) = 1$. Να εξεταστεί ως προς την ευστάθεια το παραπάνω σύστημα Σ.

Λύση: Κατά τον ίδιο τρόπο με το προηγούμενο παράδειγμα βρίσκω την συνάρτηση μεταφοράς του κλειστού συστήματος

$$H(s) = \frac{4s^2 + 11s + 9}{s^5 + 2s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 13s + 10}$$

Παράδειγμα 5 (2)

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του κλειστού συστήματος είναι:

$$a(s) = s^5 + 2s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 13s + 10$$

Παρατηρώ $a_i > 0$.

Πίνακας Routh.

s^5	**1**	**2**	**13**
s^4	2	4	10
s^3	0	8	0
s^2			
s^1			
s^0			

s^6	1	6	21	20
s^5	4	8	36	0
s^4	4	7	20	0
s^3	1	16	0	0
s^2	–57	20	0	0
s	16.35	0	0	0
s^0	20	0	0	0

Παράδειγμα 5 (3)

Παρατηρώ ότι $a(-2) = -16 \neq 0$ και συνεπώς παίρνω το χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$\begin{aligned} a'(s) &= (s+2)(s^5 + 2s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 13s + 10) \\ &= s^6 + 4s^5 + 6s^4 + 8s^3 + 21s^2 + 36s + 20 \end{aligned}$$

$$T(s) = \frac{10}{s^5 + 2s^4 + 3s^3 + 6s^2 + 5s + 3}$$

s^5	**1**	**3**	**5**
s^4	2	6	3
s^3	$\cancel{0}$ ε	7/2	0
s^2	$\frac{6\varepsilon - 7}{\varepsilon}$	3	0
s^1	$\frac{42\varepsilon - 49 - 6\varepsilon^2}{12\varepsilon - 14}$	0	0
s^0	3	0	0

Παράδειγμα 5 (4)

$$T(s) = \frac{10}{s^5 + 2s^4 + 3s^3 + 6s^2 + 5s + 3}$$

Label	First Column	ε=+	ε=-
s^5	1	+	+
s^4	2	+	+
s^3	$\cancel{0}$ ε	+	-
s^2	$\dfrac{6\varepsilon - 7}{\varepsilon}$	-	+
s^1	$\dfrac{42\varepsilon - 49 - 6\varepsilon^2}{12\varepsilon - 14}$	+	+
s^0	3	+	+

Παράδειγμα 5 (5)

$$s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0$$

Αν s ρίζα του πολυωνύμου τότε το 1/s θα είναι ρίζα του πολυωνύμου το οποίο έχει τους συντελεστές του παραπάνω πολυωνύμου αλλά σε αντίθετη σειρά. Η κατανομή των ριζών στο αριστερό και δεξίο μιγαδικό επίπεδο παραμένει η ίδια.

$$\left(\frac{1}{d}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{1}{d}\right)^{n-1} + \cdots + a_1\left(\frac{1}{d}\right) + a_0 = 0$$

$$\left(\frac{1}{d}\right)^n \left[1 + a_{n-1}\left(\frac{1}{d}\right)^{-1} + \cdots + a_1\left(\frac{1}{d}\right)^{(1-n)} + a_0\left(\frac{1}{d}\right)^{-n}\right] = 0$$

$$\left(\frac{1}{d}\right)^n [1 + a_{n-1}d + \cdots + a_1 d^{n-1} + a_0 d^n] = 0$$

Συνεπώς αρκεί να ελέγξουμε το ανάστροφο πολυώνυμο!

Παράδειγμα 5 (6)

$$T(s) = \frac{10}{s^5 + 2s^4 + 3s^3 + 6s^2 + 5s + 3}$$

$$\mathrm{D(s)} = 3s^5 + 5s^4 + 6s^3 + 3s^2 + 2s + 1$$

s^5	**3**	**6**	**2**
s^4	5	3	1
s^3	4.2	1.4	
s^2	1.33	1	
s^1	-1.75		
s^0	1		

$$\{s \to -166809\}$$
$$\{s \to -0508833 - 0701995i\}$$
$$\{s \to 0508833 + 0701995i\}$$
$$\{s \to 0342878 - 150829i\}$$
$$\{s \to 0342878 + 150829i\}$$

Περίπτωση 3 (1)

Περίπτωση 3: Μία γραμμή μηδενική στον πίνακα Routh.

Πίνακας Routh.

s^n	a_n	a_{n-2}	…
s^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	…
s^{n-2}	…	…	…
s^m	b_{m-1}	b_{m-3}	…
s^{m-1}	0	0	…
$\vdots$	$\vdots$		
s^0	d_0		

Περίπτωση 3 (2)

- **<u>Βήμα 1</u> Σχηματίζω το πολυώνυμο**

$$q(s) = b_{m-1}s^{m} + b_{m-3}s^{m-2} + b_{m-5}s^{m-4} + \cdots$$

- **<u>Βήμα 2</u> Παραγωγίζω το πολυώνυμο** $q(s)$

$$q'(s) = mb_{m-1}s^{m-1} + (m-2)b_{m-3}s^{m-3} + (m-4)b_{m-5}s^{m-4} + \cdots$$

- **<u>Βήμα 3</u> Από τους συντελεστές του** $q'(s)$ **δημιουργώ την** $(m-1)$ **γραμμή.**

$$s^{m-1}| \quad mb_{m-1} \quad (m-2)b_{m-3} \quad (m-4)b_{m-5} \quad \ldots$$

Παράδειγμα 6 (1)

$$a(s) = s^5 + s^4 + 4s^3 + 24s^2 + 3s + 63$$

Πίνακας Routh.

$\boldsymbol{s^n}$	$\boldsymbol{a_n}$	$\boldsymbol{a_{n-2}}$	…
$\boldsymbol{s^{n-1}}$	$\boldsymbol{a_{n-1}}$	$\boldsymbol{a_{n-3}}$	…
$\boldsymbol{s^{n-2}}$	…	…	…
$\boldsymbol{s^m}$	$b_{\mathrm{m}-1}$	$b_{\mathrm{m}-3}$	…
$\boldsymbol{s^{m-1}}$	0	0	…
⋮	⋮		
$\boldsymbol{s^0}$	$\boldsymbol{d_0}$		

<u>Βήμα 1</u> Σχηματίζω το πολυώνυμο

$$q(s) = 21s^2 + 63$$

<u>Βήμα 2</u> Παραγωγίζω το πολυώνυμο $q(s)$

$$q'(s) = 42s$$

<u>Βήμα 3</u> Από τους συντελεστές του $q'(s)$ **δημιουργώ την** (5) **γραμμή.**

$$s^5 \left| \quad 42 \quad 0 \right.$$

Παράδειγμα 6 (2)

$$T(s) = \frac{10}{s^5 + 7s^4 + 6s^3 + 42s^2 + 8s + 56}$$

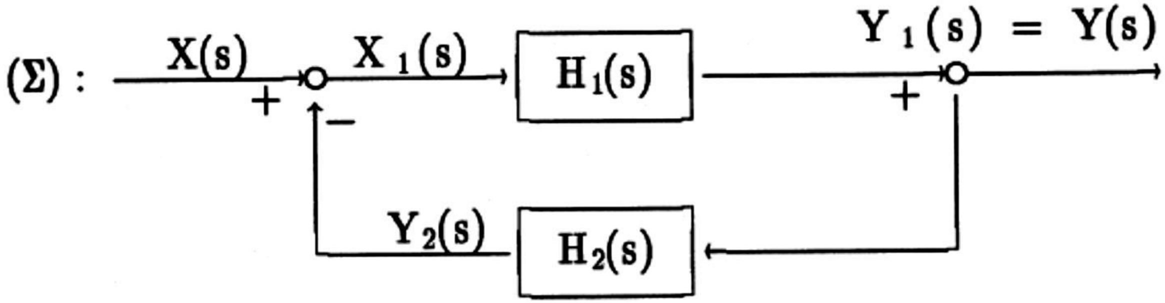
s^5	**1**	**6**	**8**
s^4	~~7~~ 1	~~42~~ 6	~~56~~ 8
s^3	~~0~~ ~~4~~ 1	~~0~~ ~~12~~ 3	~~0~~ ~~0~~ 0
s^2	3	8	0
s^1	1/3	0	0
s^0	8	0	0

$$P(s) = s^4 + 6s^2 + 8$$

$$\frac{dP(s)}{ds} = 4s^3 + 12s + 0$$

Παράδειγμα 7 (1)

Δίνεται το παρακάτω σύστημα



όπου $H_1(s) = \frac{s+1}{(s-1)(s-2)}$ και $H_2(s) = K$. Να εξεταστεί για ποιες τιμές του K το παραπάνω σύστημα είναι ευσταθές.

Λύση: Η συνάρτηση μεταφοράς του κλειστού συστήματος είναι

$$H(s) = \frac{\mathrm{H}_1(s)}{1 + H_1(s)H_2(s)} = \frac{s+1}{s^2 + (k-3)s + k + 2}$$

Παράδειγμα 7 (2)

Μία αναγκαία συνθήκη για να έχει το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του (Σ) ρίζες στο δεξιά μιγαδικό επίπεδο είναι

$$\left.\begin{array}{l} k-3>0 \\ k+2>0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} k>3 \\ k>-2 \end{array}$$

<u>Πίνακας Routh</u>

$$\begin{array}{c|cc} s^2 & 1 & k+2 \\ s^1 & k-3 & 0 \\ s^0 & k+2 & 0 \end{array}$$

Δηλαδή

$$\begin{cases} k-3>0 \\ k+2>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k>3 \\ k>-2 \end{cases}$$

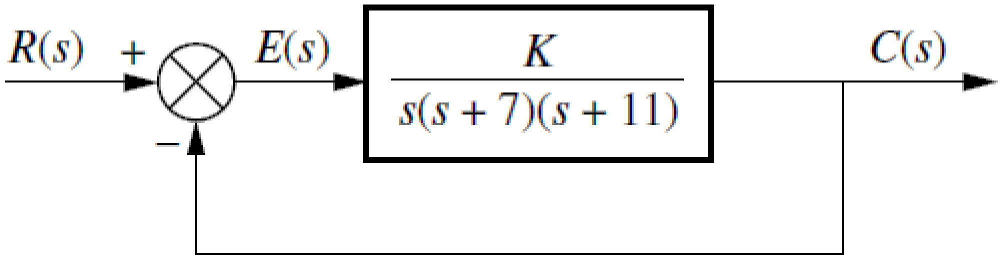
Παράδειγμα 7 (3)

οπότε το σύστημα (Σ) είναι ευσταθές για $k > 3$. Για την τιμή $k = 3$ έχω το χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$a(s) = s^2 + 5$$

Οπότε το σύστημα μου είναι ευσταθές σε κύκλο M επειδή έχει δύο πόλους πολλαπλότητας ένα στον φανταστικό άξονα.

Παράδειγμα 8 (1)

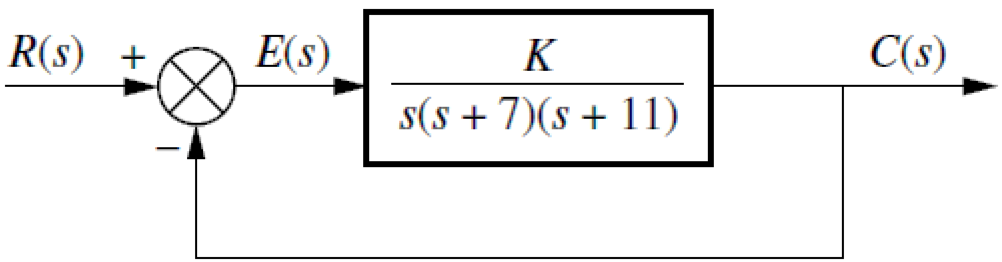


$$\mathrm{T}(s) = \frac{K}{s^3 + 18s^2 + 77s + K}$$

s^3	**1**	**77**
s^2	18	K
s^1	$\frac{1386 - K}{18}$	
s^0	K	

$$\boxed{0 < K < 1386}$$

Παράδειγμα 8 (2)



$$\boxed{K = 1386}$$

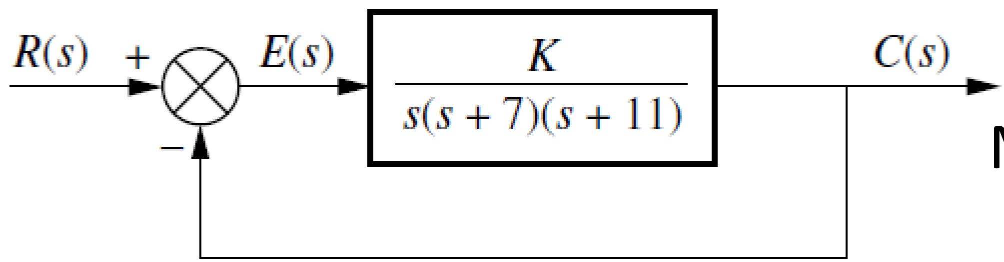
$$\mathrm{T}(s) = \frac{K}{s^3 + 18s^2 + 77s + K}$$

s^3	**1**	**77**
s^2	18	K
s^1	$\frac{1386 - K}{18}$	
s^0	K	

$$P(s) = 18s^2 + 1386$$

$$\frac{dP(s)}{ds} = 36s + 0$$

Παράδειγμα 8 (3)



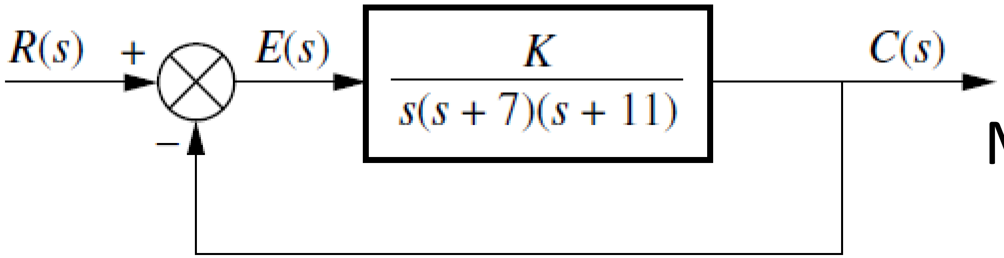
$\boxed{K = 1386}$

Marginally stable

$$\mathrm{T}(s) = \frac{K}{s^3 + 18s^2 + 77s + K}$$

s^3	**1**	**77**
s^2	18	1386
s^1	~~0~~ 36	
s^0	1386	

Παράδειγμα 8 (4)



$$\boxed{K = 0}$$

Marginally stable

$$\mathrm{T}(s) = \frac{K}{s^3 + 18s^2 + 77s + K}$$

$$s^3 + 18s^2 + 77s = s(7 + s)(11 + s)$$

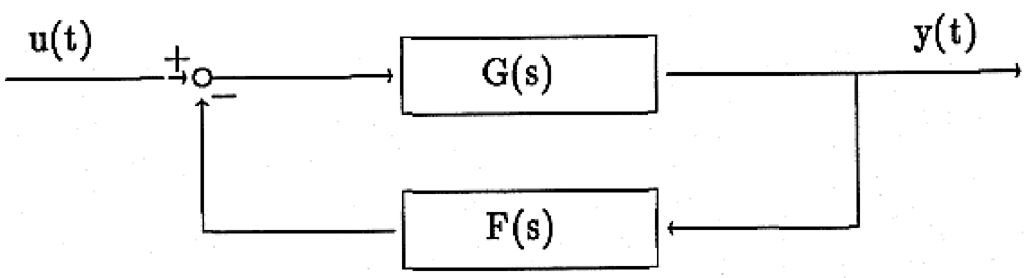
Άσκηση 2 (1)

Θεωρείστε ένα γραμμικό σύστημα Σ μιας εισόδου και μιας εξόδου

$$\xrightarrow{u(t)} \boxed{\Sigma} \xrightarrow{y(t)}$$

που διέπεται από το νόμο $\dfrac{d^2y(t)}{dt^2} - 9y(t) = u(t)$

a. Να βρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς $G(s)$ του συστήματος μου. Ακολούθως θεωρείστε το κλειστό σύστημα



σχήμα 2

Άσκηση 2 (2)

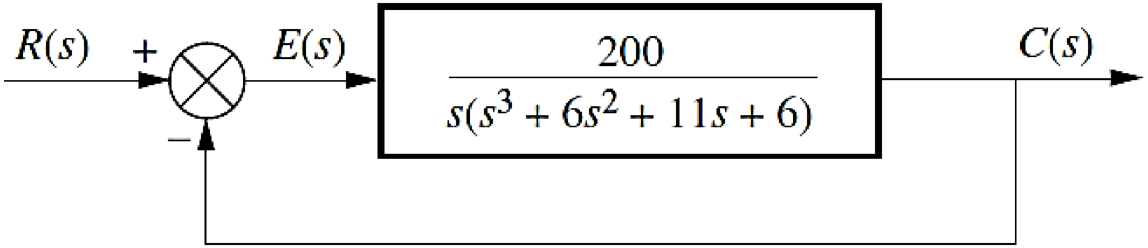
όπου $F(s) = K(s+5)\ \mu\varepsilon\ K > 0$. Για ποιες τιμές του K είναι το παραπάνω σύστημα ασυμπτωτικά ευσταθές;

b. Να βρείτε βάση του κριτηρίου Routh τις τιμές του K για τις οποίες το κλειστό σύστημα του σχήματος 2 είναι ασυμπτωτικά ευσταθές όταν αντίστοιχα $F(s) = K$ και $\mathrm{F}(s) = K(s+5)(s+1)$.

c. Ποια συνέπεια έχει στο εύρος των τιμών K, για τις οποίες το σύστημα είναι ευσταθές, η προσθήκη μηδενικών στην συνάρτηση μεταφοράς βρόγχου του κλειστού συστήματος βάσει του (a) και (b).

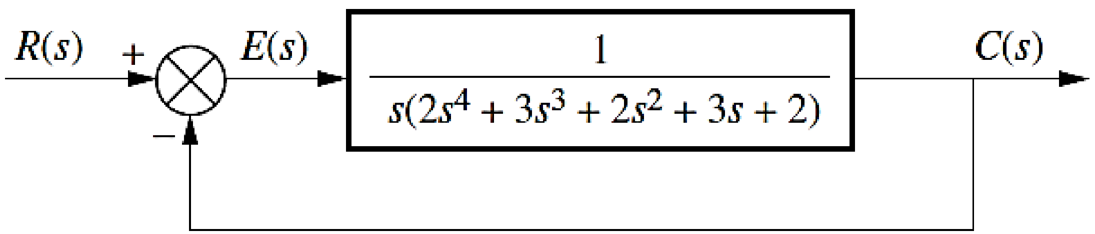
Πρόβλημα 1

- Πρόβλημα 1: Βρείτε τον αριθμό των πόλων στο RHP, στο LHP, και στον jω-άξονα για το ακόλουθο σύστημα:



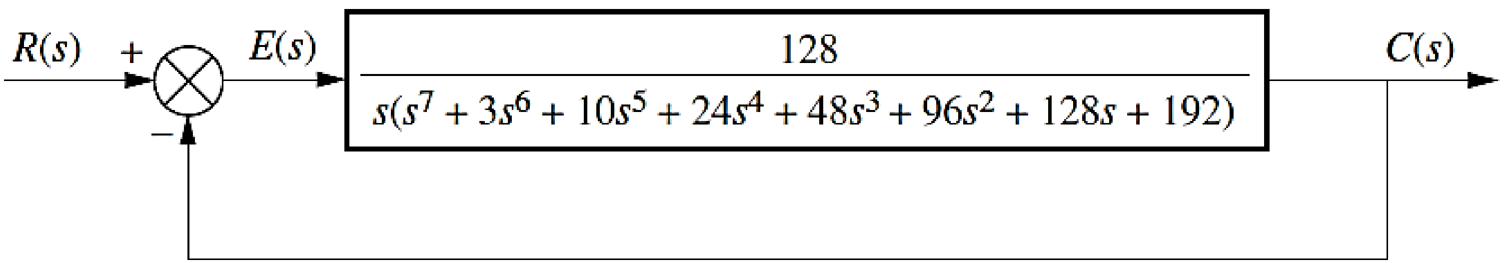
Πρόβλημα 2

- Πρόβλημα 2: Βρείτε τον αριθμό των πόλων στο RHP, στο LHP, και στον jω-άξονα για το ακόλουθο σύστημα:



Πρόβλημα 3 (1)

- Πρόβλημα 3: Βρείτε τον αριθμό των πόλων στο RHP, στο LHP, και στον jω-άξονα για το ακόλουθο σύστημα: Τι συμπεράσματα προκύπτουν για την ευστάθεια του κλειστού συστήματος?



Πρόβλημα 3 (2)

Πολυώνυμο			
Location	Even (sixth-order)	Other (second order)	Total (eighth-order)
Right half-plane (Δεξιό ημι-επίπεδο)	2	0	2
Left half-plane (Αριστερό ημι-επίπεδο)	2	2	4
jω	2	0	2

Πρόβλημα 4

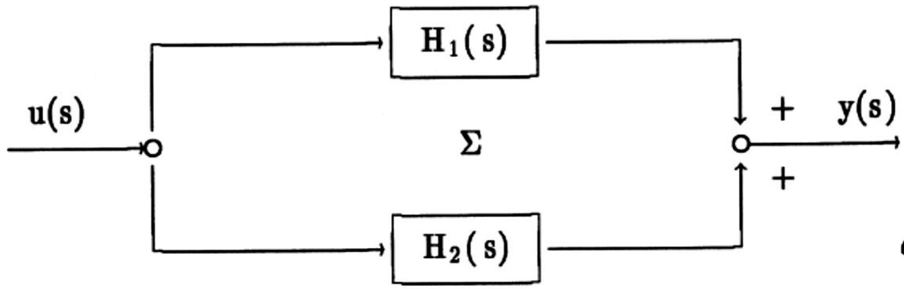
- Πρόβλημα 4: Για ένα σύστημα ανάδρασης με συνάρτηση μεταφοράς

$$G(s) = \frac{K(s+20)}{s(s+2)(s+3)}$$

  βρείτε τις τιμές του K για τις οποίες το σύστημα είναι ευσταθές.
- Απάντηση: $0 < K < 2$.

Άσκηση 3 (1)

Δίνεται το παρακάτω σύστημα μ.ε.μ.ε.



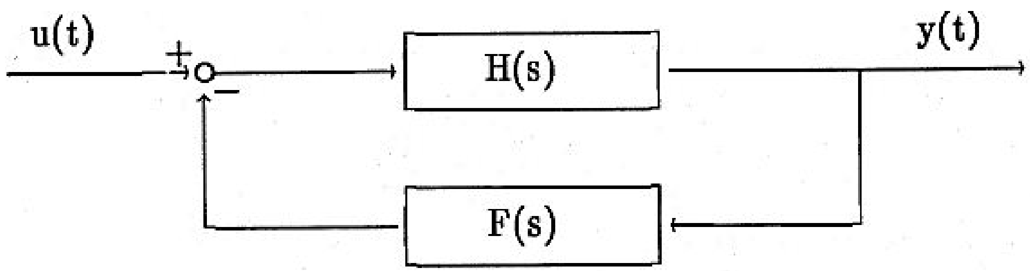
σχήμα 3

όπου $H_1(s) = \frac{1}{s+1} \in \mathbb{R}(s)$ και $H_2(s) = \frac{1}{(s+2)(s+3)} \in \mathbb{R}(s)$

1. Να βρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς του ανοικτού συστήματος Σ. Είναι το σύστημα ασυμπτωτικά ευσταθές, ναι ή όχι και γιατί;
2. Να βρείτε βάση του κριτηρίου Routh τις τιμές K για τις οποίες το κλειστό σύστημα του σχήματος 4 είναι

Άσκηση 3 (2)

ασυμπτωτικά ευσταθές όταν αντίστοιχα $F(s) = K$ και $F(s) = \frac{K}{s+4}$ όπου $H(s)$ η συνάρτηση μεταφοράς του ανοικτού συστήματος του σχήματος 3.



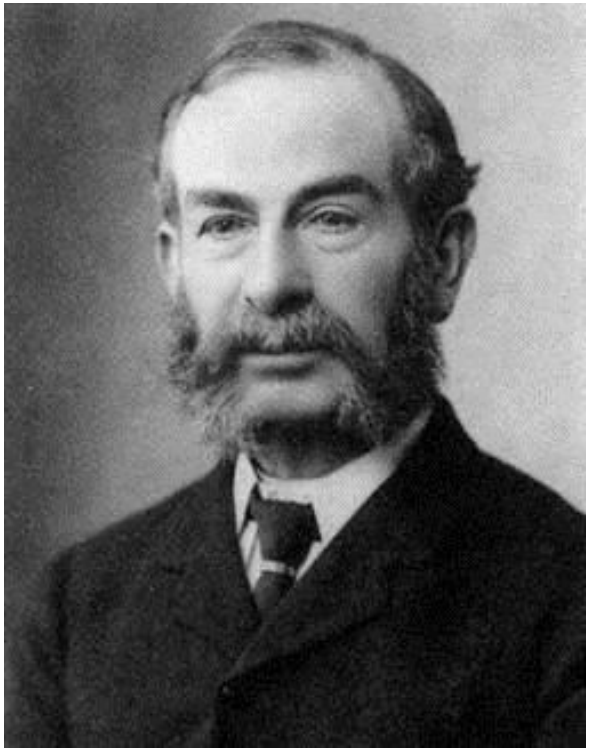
σχήμα 4

3. Ποια συνέπεια έχει στο εύρος των τιμών Κ, για τις οποίες το σύστημα είναι ευσταθές, η προσθήκη πόλων στην συνάρτηση μεταφοράς βρόγχου του κλειστού συστήματος βάσει των (1) και (2).

Routh - Hurwitz

Edward John Routh (1831–1907)

Εικόνα 2



Adolf Hurwitz (1859 –1919)

Εικόνα 3

Κριτήριο Routh-Hurwitz

Ένα πολυώνυμο

$$a(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n$$

όπου οι συντελεστές a_i είναι πραγματικές σταθερές, $i = 1, \ldots, n$, θα λέμε ότι είναι ευσταθές αν και μόνο εάν όλες οι ορίζουσες Δ_i που φαίνονται παρακάτω είναι θετικές.

$$\Delta_1 = \alpha_1 > 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} > 0$$

$$\ldots$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & \ldots & 0 \\ a_0 & a_2 & \ldots & \\ & & & \\ 0 & 0 & \ldots & a_n \end{vmatrix} > 0$$

Οι ορίζουσες $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ ονομάζονται **ορίζουσες Hurwitz.**

Παράδειγμα 9

$$\alpha(s) = s^4 + 10s^3 + 35s^2 + 50s + 24$$

$$H = \begin{bmatrix} 10 & 50 & 0 & 0 \\ 1 & 35 & 24 & 0 \\ 0 & 10 & 50 & 0 \\ 0 & 1 & 35 & 24 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_1 = 10 > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 10 & 50 \\ 1 & 35 \end{vmatrix} = 300 > 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 10 & 50 & 0 \\ 1 & 35 & 24 \\ 0 & 10 & 50 \end{vmatrix} = 12600 > 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 10 & 50 & 0 & 0 \\ 1 & 35 & 24 & 0 \\ 0 & 10 & 50 & 0 \\ 0 & 1 & 35 & 24 \end{vmatrix} = 302400 > 0$$

Σχέση πίνακα Routh και Hurwitz (1)

$$f(s) = a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \cdots + a_1 s + a_0, a_n \neq 0$$

$$H = \left\| \begin{matrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & a_1 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & a_0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & & a_3 \\ 0 & a_n & a_{n-4} & \dots & a_2 \\ 0 & 0 & a_{n-1} & \dots & a_5 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{matrix} \right\| \left(\begin{matrix} a_k = 0\, \gamma\iota\alpha & k > \left[\frac{n}{2}\right] \\ b_k = 0\, \gamma\iota\alpha & k > \left[\frac{n-1}{2}\right] \end{matrix} \right)$$

Μετατρέπουμε τον πίνακα αφαιρώντας από τη 2η ,4η … γραμμή την 1η ,3η … γραμμή πολλαπλασιασμένη επί a_n/a_{n-1} και παίρνουμε τον πίνακα

Σχέση πίνακα Routh και Hurwitz (2)

$$\begin{Vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & a_1 \\ 0 & b_{n-1} & b_{n-3} & \dots & a_0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & & a_3 \\ 0 & 0 & b_{n-1} & \dots & a_2 \\ 0 & 0 & a_{n-1} & \dots & a_5 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{Vmatrix}$$

Μετατρέπουμε τον πίνακα αφαιρώντας από τη 3η, 5η … γραμμή την 2η, 4η … γραμμή πολλαπλασιασμένη επί a_{n-1}/b_{n-1} και παίρνουμε τον πίνακα

Σχέση πίνακα Routh και Hurwitz (3)

$$\begin{Vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & \cdots \\ 0 & b_{n-1} & b_{n-3} & b_{n-5} & \cdots \\ 0 & 0 & c_{n-1} & c_{n-3} & \cdots \\ 0 & 0 & b_{n-1} & b_{n-3} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & c_{n-1} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & b_{n-1} & \vdots \end{Vmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow R = \begin{Vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots \\ 0 & b_{n-1} & b_{n-3} & \cdots \\ 0 & 0 & c_{n-1} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{Vmatrix}$$

Τον οποίο θα αποκαλούμε **μήτρα του Routh** αυτός ο πίνακας προκύπτει από τον πίνακα Routh :

1) διαγράφοντας την 1η γραμμή,
2) μετακινώντας τις γραμμές προς τα δεξιά έτσι ώστε τα πρώτα στοιχεία τους να βρίσκονται στην κύρια διαγώνιο και
3) συμπληρώνουμε με μηδενικά τον τετραγωνικό πίνακα τάξης n.

Σχέση πίνακα Routh και Hurwitz (4)

Οι πίνακες Routh και Hurwitz είναι ισοδύναμοι.

$$H\begin{pmatrix} 1\ 2\ \ \dots p \\ i_1, i_2, \dots, i_p \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} 1\ 2\ \ \dots p \\ i_1, i_2, \dots, i_p \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} i_1, i_2, \dots, i_p = 1,2,\dots,n \\ p = 1,2,\dots,n \end{matrix}$$

$$\left.\begin{matrix}
H\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = a_{n-1}, & H\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = a_{n-3}, & H\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = a_{n-5}, & \dots, \\
H\begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix} = a_{n-1}b_{n-1}, & H\begin{pmatrix} 12 \\ 13 \end{pmatrix} = a_{n-1}b_{n-3}, & H\begin{pmatrix} 12 \\ 14 \end{pmatrix} = a_{n-1}b_{n-5}, & \dots, \\
H\begin{pmatrix} 123 \\ 123 \end{pmatrix} = a_{n-1}b_{n-1}c_{n-1}, & H\begin{pmatrix} 123 \\ 124 \end{pmatrix} = a_{n-1}b_{n-1}c_{n-3}, & H\begin{pmatrix} 123 \\ 125 \end{pmatrix} = a_{n-1}b_{n-1}c_{n-5}, & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots
\end{matrix}\right\}$$

Σχέση πίνακα Routh και Hurwitz (5)

$$\left.\begin{array}{llll}
a_{n-1} = H\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, & a_{n-3} = H\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, & a_{n-5} = H\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}, & \ldots, \\
b_{n-1} = \dfrac{H\begin{pmatrix}12\\12\end{pmatrix}}{H\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}} & b_{n-3} = \dfrac{H\begin{pmatrix}12\\13\end{pmatrix}}{H\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}} & b_{n-5} = \dfrac{H\begin{pmatrix}12\\14\end{pmatrix}}{H\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}} & \ldots, \\
c_{n-1} = \dfrac{H\begin{pmatrix}123\\123\end{pmatrix}}{H\begin{pmatrix}12\\12\end{pmatrix}} & c_{n-3} = \dfrac{H\begin{pmatrix}123\\124\end{pmatrix}}{H\begin{pmatrix}12\\12\end{pmatrix}} & c_{n-5} = \dfrac{H\begin{pmatrix}123\\125\end{pmatrix}}{H\begin{pmatrix}12\\12\end{pmatrix}} & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}\right\}$$

Στοιχεία πίνακα Routh $\boldsymbol{a_{n-1} = \Delta_1, b_{n-1} = \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, c_{n-1} = \frac{\Delta_3}{\Delta_2}, \ldots}$

Κριτήριο Ευσταθείας Lienard – Chipart (1)

Alfred-Marie Liénard (1869-1958)

Εικόνα 4

Κριτήριο Ευσταθείας Lienard – Chipart (2)

Δεδομένου ενός πολυωνύμου

$$a(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n$$

αν $a_i > 0, i = 1, \dots, n$, τότε οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες.

i. $a(s)$ *είναι ευσταθές,*

ii. $\Delta_1 > 0, \Delta_3 > 0, \Delta_5 > 0, \dots$

iii. $\Delta_2 > 0, \Delta_4 > 0, \Delta_6 > 0, \dots$

Κριτήριο Ευσταθείας Lienard – Chipart (3)

$$\alpha(\lambda) = \lambda^n + \alpha_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n$$

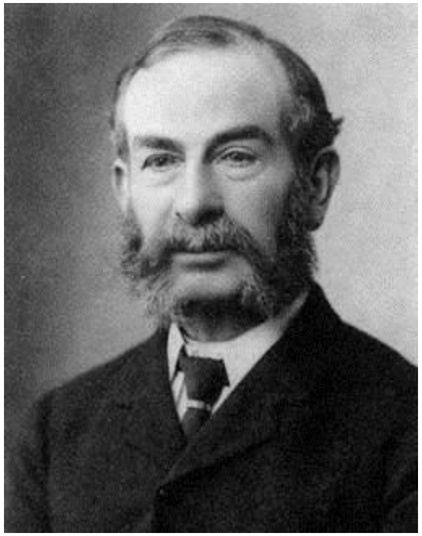
Theorem 1: Necessary and sufficient conditions for to be stable are that

$$a_n > 0, a_1 > 0, a_3 > 0, a_5 > 0, \ldots$$

and $\Delta_{n-1} > 0, \Delta_{n-3} > 0, \Delta_{n-5} > 0, \ldots \begin{Bmatrix} \Delta_3 > 0 & (n\ even) \\ \Delta_2 > 0 & (n\ odd) \end{Bmatrix}$

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & & a_{2i-1} \\ 1 & a_2 & a_4 & & a_{2i-2} \\ 0 & a_1 & a_3 & & a_{2i-3} \\ 0 & 1 & a_2 & \ldots & a_{2i-4} \\ 0 & 0 & 0 & & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & a_i \end{vmatrix}$$

Μια διαφορετική εκδοχή του κριτηρίου Routh (1)



Εικόνα 5

Μια διαφορετική εκδοχή του κριτηρίου Routh

Μια διαφορετική εκδοχή του κριτηρίου Routh (2)

$$a(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n$$

$$r_0(s) = a_0 s^n + a_2 s^{n-2} + \cdots$$

$$r_1(s) = a_1 s^{n-1} + a_3 s^{n-3} + \cdots$$

$$\downarrow$$

$$\frac{r_0(s)}{r_1(s)} = \breve{a}_1 s + \frac{r_2(s)}{r_1(s)}$$

$$\frac{1}{\dfrac{r_1(s)}{r_2(s)}}$$

$$\boxed{\breve{a}_1 = \frac{a_0}{a_1}}$$

Μια διαφορετική εκδοχή του κριτηρίου Routh (3)

$$r_1(s) = a_1 s^{n-1} + a_3 s^{n-3} + \cdots$$

$$r_2(s) = r_{20} s^{n-2} + r_{21} s^{n-4} + \cdots$$

$$\downarrow$$

$$\frac{r_1(s)}{r_2(s)} = \breve{a}_2 s + \frac{r_3(s)}{r_2(s)}$$

$$\frac{r_0(s)}{r_1(s)} = \breve{a}_1 s + \frac{1}{\breve{a}_2 s + \frac{r_3(s)}{r_2(s)}}$$

$$\boxed{\breve{a}_2 = \frac{a_1}{r_{21}}}$$

Μια διαφορετική εκδοχή του κριτηρίου Routh (4)

$$\frac{r_0(s)}{r_1(s)} = \breve{a}_1 s + \cfrac{1}{\breve{a}_2 s + \cfrac{1}{\breve{a}_3 s + \ddots \cfrac{1}{\breve{a}_{n-1} s + \cfrac{1}{\breve{a}_n s}}}}$$

Όλα τα $\breve{a}_i$ ονομάζονται **άτομα** (**atoms**) του πολυωνύμου $a(s)$.

Το πολυώνυμο $a(s)$ είναι ευσταθές αν και μόνο αν τα άτομά του είναι θετικά, δηλαδή αν και μόνο αν ισχύει

$$\breve{a}_i > 0, \forall i = 1, \dots, n$$

Μια διαφορετική εκδοχή του κριτηρίου Routh (5)

$$a(s) = s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 4s + k$$

$$r_0(s) = s^4 + 4s^2 + k$$

$$r_1(s) = 2s^3 + 4s$$

$$\underbrace{s^4 + 4s^2 + k}_{r_0(s)} = \left(\frac{s}{2}\right)\underbrace{\left(2s^3 + 4s\right)}_{r_1(s)} + \left(2s^2 + k\right) \Rightarrow$$

$$\frac{r_0(s)}{r_1(s)} = \frac{s}{2} + \frac{2s^2 + k}{2s^3 + 4s} = \frac{1}{2}s + \frac{1}{\dfrac{2s^3 + 4s}{2s^2 + k}}$$

Μια διαφορετική εκδοχή του κριτηρίου Routh (6)

$$a(s) = s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 4s + k$$

$$r_1(s) = 2s^3 + 4s$$

$$r_2(s) = 2s^2 + k$$

$$\underbrace{2s^3 + 4s}_{r_1(s)} = s\underbrace{\left(2s^2 + k\right)}_{r_2(s)} + (4 - k)s \Rightarrow$$

$$\frac{r_1(s)}{r_2(s)} = 1 \times s + \frac{(4-k)s}{2s^2 + k} = 1 \times s + \frac{1}{\dfrac{2s^2 + k}{(4-k)s}}$$

Μια διαφορετική εκδοχή του κριτηρίου Routh (7)

$$a(s) = s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 4s + k$$

$$r_2(s) = 2s^2 + k$$

$$r_3(s) = (4-k)s$$

$$\underbrace{2s^2 + k}_{r_2(s)} = \frac{2}{4-k}\Big(\underbrace{(4-k)s}_{r_3(s)}\Big) + k \Rightarrow$$

$$\frac{r_2(s)}{r_3(s)} = \frac{2}{4-k} \times s + \frac{k}{(4-k)s} = \frac{2}{4-k} \times s + \frac{1}{\frac{4-k}{k}s}$$

Μια διαφορετική εκδοχή του κριτηρίου Routh (8)

$$\frac{r_0(s)}{r_1(s)} = \frac{1}{2}s + \frac{1}{\dfrac{2s^3+4s}{2s^2+k}} =$$

$$= \frac{1}{2}s + \frac{1}{1\times s + \dfrac{1}{\dfrac{2s^2+k}{(4-k)s}}} =$$

$$= \frac{1}{2}s + \frac{1}{1\times s + \dfrac{1}{\dfrac{2}{4-k}\times s + \dfrac{1}{\dfrac{4-k}{k}s}}}$$

$$\frac{2}{4-k} > 0 \wedge \frac{4-k}{k} > 0$$

$$\Downarrow$$

$$0 < K < 4$$

Θεώρημα Kharitonov (1)

Kharitonov Vladimir Leonidovich

Εικόνα 6

Θεώρημα Kharitonov (2)

$$p(s) = a_0 + a_1 s^1 + a_2 s^2 + \cdots + a_n s^n, l_i \leq a_i \leq u_i.$$

Ο μεγιστοβάθμιος συντελεστής δεν είναι 0 δηλ. $0 \notin [l_n, u_n]$.

Το πολυώνυμο $p(s)$ είναι ευσταθές αν και μόνο αν τα παρακάτω πολυώνυμα είναι ευσταθή:

$$k_1(s) = l_0 + l_1 s^1 + u_2 s^2 + u_3 s^3 + l_4 s^4 + l_5 s^5 + \cdots$$
$$k_2(s) = u_0 + u_1 s^1 + l_2 s^2 + l_3 s^3 + u_4 s^4 + u_5 s^5 + \cdots$$
$$k_3(s) = l_0 + u_1 s^1 + u_2 s^2 + l_3 s^3 + l_4 s^4 + u_5 s^5 + \cdots$$
$$k_4(s) = u_0 + l_1 s^1 + l_2 s^2 + u_3 s^3 + u_4 s^4 + l_5 s^5 + \cdots$$

Θεώρημα Kharitonov (3)

$$a(s) = \{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n \colon\ a_i \in [a_{-i}, \bar{a}_i]\}$$

Ο μεγιστοβάθμιος συντελεστής δεν είναι 0 δηλ. $0 \notin [a_{-0}, \bar{a}_0]$

Το πολυώνυμο $p(s)$ είναι ευσταθές αν και μόνο αν τα παρακάτω πολυώνυμα είναι ευσταθή:

$$a_1(s) = \underline{a}_0 s^n + \underline{a}_1 s^{n-1} + \bar{a}_2 s^{n-2} + \bar{a}_3 s^{n-4} + \underline{a}_4 s^{n-5} + \cdots$$

$$a_2(s) = \underline{a}_0 s^n + \bar{a}_1 s^{n-1} + \bar{a}_2 s^{n-2} + \underline{a}_3 s^{n-4} + \underline{a}_4 s^{n-5} + \cdots$$

$$a_3(s) = \bar{a}_0 s^n + \underline{a}_1 s^{n-1} + \underline{a}_2 s^{n-2} + \bar{a}_3 s^{n-4} + \bar{a}_4 s^{n-5} + \cdots$$

$$a_4(s) = \bar{a}_0 s^n + \bar{a}_1 s^{n-1} + \underline{a}_2 s^{n-2} + \underline{a}_3 s^{n-4} + \bar{a}_4 s^{n-5} + \cdots$$

Θεώρημα Kharitonov (4)

$$a(s) = \{s^4 + a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_3 s + a_4 : a_1 \in [3,4], a_2 \in [3,4], a_3 \in [2,3], a_4 \in [0.5,1], a_0 \in [1,1]\}$$

$$a_1(s) = s^4 + 3s^3 + 4s^2 + 3s + 0.5$$

$$a_2(s) = s^4 + 4s^3 + 4s^2 + 2s + 0.5$$

$$a_3(s) = s^4 + 3s^3 + 3s^2 + 3s + 1$$

$$a_4(s) = s^4 + 4s^3 + 3s^2 + 2s + 1$$

Τα παραπάνω πολυώνυμα είναι ευσταθή και συνεπώς το **διαστηματικό πολυώνυμο (interval polynomial)** $a(s)$ είναι ευσταθές.

Βιβλιογραφία

- Βαρδουλάκης Α.Ι., 2011, *Εισαγωγή στη Μαθηματική Θεωρία Συστημάτων και Ελέγχου*, Τόμος Α: Κλασική Θεωρία Ελέγχου, Εκδόσεις Τζιόλα.
- https://en.wikipedia.org/wiki/Edward_Routh
- http://annales.org/archives/x/lienard.html
- https://en.wikipedia.org/wiki/Adolf_Hurwitz
- http://www.apmath.spbu.ru/en/staff/kharitonov/index.html
- Li Qiu and Kemin Zhou, 2010, *Introduction to Feedback Control*, Pearson Ed.

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (1/2)

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες

- **Εικόνα 1, 2:** "**Edward J Routh**" by en:user:QueenAdelaide - English Wikipedia here, original source http://www.gap-system.org/~history/BigPictures/Routh.jpeg. Licensed under Public Domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Edward_J_Routh.jpg#/media/File:Edward_J_Routh.jpg
- **Εικόνα 3:** "**Adolf Hurwitz**" by Unknown - MacTutor biography, http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Hurwitz.html. Licensed under Public Domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Adolf_Hurwitz.jpg#/media/File:Adolf_Hurwitz.jpg

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (2/2)

- **Εικόνα 4:** http://annales.org/archives/x/lienard.html
- **Εικόνα 5:** "**Edward J Routh**" by en:user:QueenAdelaide - English Wikipedia here, original source http://www.gap-system.org/~history/BigPictures/Routh.jpeg. Licensed under Public Domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Edward_J_Routh.jpg#/media/File:Edward_J_Routh.jpg
- **Εικόνα 6:** http://www.apmath.spbu.ru/en/staff/kharitonov/index.html

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Νικόλαος Καραμπετάκης. «Κλασσική Θεωρία Ελέγχου. Ενότητα 10: Αλγεβρικά κριτήρια ευστάθειας». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

http://eclass.auth.gr/courses/OCRS432/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου
Θεσσαλονίκη, Χειμερινό εξάμηνο 2014-2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης