ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Κλασσική Θεωρία Ελέγχου

Ενότητα 15: Επίλυση διοφαντικών εξισώσεων πολυωνύμων

Νίκος Καραμπετάκης
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα Ενότητας

- Πολυώνυμα πρώτα μεταξύ τους (ορίζουσα Sylvester).
- Επίλυση διοφαντικών εξισώσεων πολυωνύμων.

Σκοποί Ενότητας

- Επίλυση διοφαντικών εξισώσεων πολυωνύμων πάνω στον δακτύλιο των πολυωνύμων.

Λήμμα (1)

Λήμμα: Τα πολυώνυμα $f(s), g(s)$ έχουν κοινό παράγοντα αν και μόνο αν υπάρχουν μη-μηδενικά πολυώνυμα $s(s)$ και $t(s)$ τέτοια ώστε

$$0 \leq degs(s) < degg(s), 0 \leq degt(s) < degf(s)$$
$$f(s)s(s) + g(s)t(s) = 0$$

Απόδειξη: (⇒) Ας υποθέσουμε ότι τα πολυώνυμα $f(s), g(s)$ έχουν κοινό παράγοντα τον $h(s)$. Τότε

$$f(s) = \left(\frac{f(s)}{h(s)}\right) h(s), g(s) = \left(\frac{g(s)}{h(s)}\right) h(s)$$

και συνεπώς

Λήμμα (2)

$$f(s)\frac{g(s)}{h(s)} = \frac{f(s)}{h(s)}h(s)\frac{g(s)}{h(s)} = \frac{f(s)}{h(s)}g(s) \Rightarrow$$

$$f(s)\left(\frac{g(s)}{h(s)}\right) - \left(\frac{f(s)}{h(s)}\right)g(s) \equiv 0$$

Συνεπώς υπάρχουν μη-μηδενικά πολυώνυμα

$$s(s) = \frac{g(s)}{h(s)} \text{ και } t(s) = -\frac{f(s)}{h(s)}$$

τέτοια ώστε

$$0 \leq degs(s) < degg(s), 0 \leq degt(s) < degf(s)$$

$$f(s)s(s) + g(s)t(s) = 0$$

Λήμμα (3)

(⇐) Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν μη-μηδενικά πολυώνυμα $s(s)$ και $t(s)$ τέτοια ώστε

$$0 \leq degs(s) < degg(s), 0 \leq degt(s) < degf(s)$$

$$f(s)s(s) + g(s)t(s) = 0$$

$$\downarrow$$

$$f(s)s(s) = -g(s)t(s)$$

Κάθε παράγοντας του $f(s)$ είναι παράγοντας του $g(s)t(s)$.

1η περίπτωση. Υπάρχει παράγοντας του $f(s)$ που είναι παράγοντας του $g(s)$ (κοινός παράγοντας).

Λήμμα (4)

2η περίπτωση. Δεν υπάρχει παράγοντας του $f(s)$ που να είναι παράγοντας του $g(s)$. Συνεπώς θα πρέπει όλοι οι παράγοντες του $f(s)$ να είναι παράγοντες του $t(s)$.

Το $t(s)$ όμως είναι μη-μηδενικό και έχει βαθμό μικρότερο του $f(s)$ και συνεπώς αυτό είναι αδύνατο.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ: Τα $f(s), g(s)$ έχουν κοινό παράγοντα.

Ορίζουσα Sylvester (1)

$$n = degf, m = degg$$

$$\boxed{s = \sum_{0 \leq i < m} s_i x^i, t = \sum_{0 \leq i < n} t_i x^i}$$

$$P(x) = f(x)s(x) + g(x)t(x)$$

$$P(x) = (f_n s_{m-1} + g_m t_{n-1})x^{m+n-1}$$
$$+ (f_n s_{m-2} + f_{n-1} s_{m-1} + g_m t_{n-m-2}$$
$$+ g_{m-2} t_{n-m-1})x^{m+n-2} + \cdots + (f_0 s_0 + g_0 t_0)x^0.$$

Ορίζουσα Sylvester (2)

$$P(x) \equiv 0$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} f_n s_{m-1} + g_m t_{n-1} = 0 \\ f_n s_{m-2} + f_{n-1} s_{m-1} + g_m t_{n-m-2} + g_{m-2} t_{n-m-1} = 0 \\ \vdots = 0 \\ f_0 s_0 + g_0 t_0 = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{(s_{m-1}, \dots, s_0, t_{n-1}, \dots, t_0) Syl(f, g) = 0}$$

Ορίζουσα Sylvester (3)

$$Syl(f,g) = \begin{pmatrix} f_n & & \cdots & & f_0 & & \\ & \ddots & & & & \ddots & \\ & & f_n & \cdots & & & f_0 \\ g_m & & \cdots & g_0 & & & \\ & \ddots & & & \ddots & & \\ & & g_m & \cdots & & & g_0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \} \quad m\, rows \\ \} \quad n\, rows \\ \\ \\ \end{matrix}$$

Ορίζουσα Sylvester (4)

$$\boxed{(s_{m-1}, \dots, s_0, t_{n-1}, \dots, t_0) Syl(f,g) = 0}$$

$$Syl(f,g) = \begin{array}{l} \left(\begin{array}{ccccccc} f_n & & \cdots & & f_0 & & \\ & \ddots & & & & \ddots & \\ & & f_n & \cdots & & & f_0 \\ g_m & & \cdots & g_0 & & & \\ & \ddots & & & \ddots & & \\ & & g_m & \cdots & & & g_0 \end{array} \right) \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \} \quad m\, rows \\ \} \quad n\, rows \\ \\ \\ \end{array}$$

Για να υπάρχει μη-μηδενική λύση θα πρέπει η ορίζουσα Sylvester να είναι ίση με μηδέν!

Η **resultant** των πολυωνύμων $f(s), g(s)$, συμβολίζεται $res(f,g)$, και ορίζεται ως η ορίζουσα του πίνακα **Sylvester** π.χ.

$$res(f,g) = Det[Syl(f(s), g(s))]$$

Θεώρημα (1)

Θεώρημα. Έστω $f(s), g(s)$ πολυώνυμα με πραγματικούς συντελεστές. Τα $f(s), g(s)$ έχουν κοινό παράγοντα αν και μόνο αν $res(f,g) = 0$.

Παράδειγμα:

$$f(x) = x^2 - 5x + 6, \qquad g(x) = x^2 - 3x + 2$$

$$res(f,g) = \det\begin{pmatrix} 1 & -5 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 6 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} = 0$$

Τα $f(s), g(s)$ έχουν κοινό παράγοντα.

Θεώρημα (2)

Θεώρημα. Έστω $f(s), g(s)$ πολυώνυμα με πραγματικούς συντελεστές. Τα $f(s), g(s)$ έχουν κοινό παράγοντα αν και μόνο αν $res(f,g) = 0$.

Παράδειγμα:

$$f(x) = x^2 - 7x + 12, \qquad g(x) = x^2 - x$$

$$res(f,g) = \det\begin{pmatrix} 1 & -7 & 12 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & 12 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 72 \neq 0$$

Τα $f(s), g(s)$ **δεν** έχουν κοινό παράγοντα.

Πολυώνυμα πρώτα μεταξύ τους (1)

Έστω τα πολυώνυμα

$$d(s) = d_n s^n + d_{n-1} s^{n-1} + \cdots + d_1 s + d_0, \deg\big(d(s)\big) = n$$

$$h(s) = h_{n-1} s^{n-1} + \cdots + h_1 s + h_0, \deg\big(h(s)\big) = n - 1$$

$$S(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s & 0 \\ \vdots & \vdots \\ s^{n-1} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & s \\ \vdots & \vdots \\ 0 & s^{n-1} \end{bmatrix}$$

Πολυώνυμα πρώτα μεταξύ τους (2)

$$x(s) = S(s)\begin{bmatrix} d(s) \\ h(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s & 0 \\ \vdots & \vdots \\ s^{n-1} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & s \\ \vdots & \vdots \\ 0 & s^{n-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d(s) \\ h(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d(s) \\ sd(s) \\ \vdots \\ s^{n-1}d(s) \\ h(s) \\ sh(s) \\ \vdots \\ s^{n-1}h(s) \end{bmatrix}$$

$$degx(s) = \max\{degx_i(s)\} = 2n - 1$$

Πολυώνυμα πρώτα μεταξύ τους (3)

$$x(s)=x_0+x_1s+\cdots+x_{2n-1}s^{2n-1}=\begin{bmatrix}x_0 & x_1 & \dots & x_{2n-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ s\\ \vdots\\ \\ \vdots\\ s^{2n-1}\end{bmatrix}=R\hat{s}(s)$$

όπου

$$R=\begin{bmatrix}x_0 & x_1 & \dots & x_{2n-1}\end{bmatrix}\left[\begin{array}{cccc|cccc}
d_0 & d_1 & \dots & d_{n-1} & d_n & 0 & \dots & 0\\
0 & d_0 & \dots & d_{n-2} & d_{n-1} & d_n & \dots & 0\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
0 & 0 & \dots & d_0 & d_1 & \dots & d_{n-1} & d_n\\
\hline
h_0 & h_1 & \dots & h_{n-1} & 0 & 0 & \dots & 0\\
0 & h_0 & \dots & h_{n-2} & h_{n-1} & 0 & \dots & 0\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
0 & 0 & \dots & h_0 & h_1 & \dots & h_{n-1} & 0
\end{array}\right]$$

Θεώρημα Sylvester

Θεώρημα Sylvester. Τα πολυώνυμα

$$d(s) = d_n s^n + d_{n-1} s^{n-1} + \cdots + d_1 s + d_0, \deg\big(d(s)\big) = n$$

$$h(s) = h_{n-1} s^{n-1} + \cdots + h_1 s + h_0, \deg\big(h(s)\big) = n - 1$$

είναι πρώτα μεταξύ τους εάν και μόνο εάν

$$rankR = 2n.$$

Ο πίνακας R ονομάζεται **resultant** των $d(s)$ και $h(s)$.

Παράδειγμα 1

Έστω

$$d(s) = s^3 - 5s + 6, \deg\big(d(s)\big) = 3$$

$$h(s) = s^2 - 4s + 4, \deg\big(h(s)\big) = 2$$

$$R = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 6 & -5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -5 & 0 & 1 \\ \hline 4 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow detR = 16 \neq 0$$

Συμπέρασμα: $d(s)$ και $h(s)$ είναι πρώτα μεταξύ τους.

Θεώρημα (Επίλυση πολυωνυμικής Διοφαντικής εξίσωσης)

Αν τα πολυώνυμα

$$d(s) = d_n s^n + d_{n-1} s^{n-1} + \cdots + d_1 s + d_0, \deg\big(d(s)\big) = n$$

$$h(s) = h_{n-1} s^{n-1} + \cdots + h_1 s + h_0, \deg\big(h(s)\big) = n - 1$$

είναι πρώτα μεταξύ τους και

$$f(s) = f_{2n-1} s^{2n-1} + f_{2n-2} s^{2n-2} + \cdots + f_0, \deg\big(f(s)\big) = 2n - 1$$

είναι αυθαίρετο πολυώνυμο, τότε υπάρχουν πολυώνυμα $a(s), b(s)$ βαθμού μικρότερου ή ίσου του $n-1$ τέτοια ώστε

$$a(s)d(s) + b(s)h(s) = f(s).$$

Απόδειξη (1)

Απόδειξη:

$$a(s) = a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} \dots + a_0, \deg\big(a(s)\big) = n-1$$

$$b(s) = b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \cdots + b_0, \deg\big(b(s)\big) = n-1$$

$$a(s)d(s) + b(s)h(s) = f(s) \Rightarrow [a(s) \quad b(s)]\begin{bmatrix} d(s) \\ h(s) \end{bmatrix} = f(s) \Rightarrow$$

$$[a_0 \quad a_1 \quad \dots \quad a_{n-1}\; b_0 \quad b_1 \quad \dots \quad b_{n-1}]\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s & 0 \\ \vdots & \vdots \\ s^{n-1} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & s \\ \vdots & \vdots \\ 0 & s^{n-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d(s) \\ h(s) \end{bmatrix} = f(s) \Rightarrow$$

Απόδειξη (2)

$$[a_0 \quad a_1 \quad \dots \quad a_{n-1}\; b_0 \quad b_1 \quad \dots \quad b_{n-1}]R\begin{bmatrix} 1 \\ s \\ \vdots \\ \\ \vdots \\ s^{2n-1} \end{bmatrix} = [f_0 \quad f_1 \quad \dots \quad f_{2n-1}]\begin{bmatrix} 1 \\ s \\ \vdots \\ \\ \vdots \\ s^{2n-1} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$[a_0 \quad a_1 \quad \dots \quad a_{n-1}\; b_0 \quad b_1 \quad \dots \quad b_{n-1}]R = [f_0 \quad f_1 \quad \dots \quad f_{2n-1}] \Rightarrow$$

$$[a_0 \quad a_1 \quad \dots \quad a_{n-1}\; b_0 \quad b_1 \quad \dots \quad b_{n-1}] = [f_0 \quad f_1 \quad \dots \quad f_{2n-1}]R^{-1}$$

Παράδειγμα 1 συνέχεια

Έστω $d(s) = s^3 - 5s + 6, \deg\big(d(s)\big) = 3$ $\kappa\alpha\iota$ $h(s) = s^2 - 4s + 4$, $\deg\big(h(s)\big) = 2$

$$f(s) = s^4 - s^2 + s - 1$$

$$[a_0 \quad a_1 \quad a_2\; b_0 \quad b_1 \quad b_2]$$

$$= [-1 \quad 1 \quad -1\; 0 \quad 1 \quad 0]\left[\begin{array}{ccc|ccc} 6 & -5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -5 & 0 & 1 \\ \hline 4 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & 1 & 0 \end{array}\right]^{-1}$$

$$= \left[\frac{1}{8} \quad \frac{25}{16} \quad 0 - \frac{7}{16} \quad -\frac{19}{8} \quad -\frac{9}{16}\right]$$

$$a(s) = \frac{1}{8} + \frac{25}{16}s + 0s^2, \qquad b(s) = -\frac{7}{16} - \frac{19}{8}s - \frac{9}{16}s^2$$

Βιβλιογραφία

- Βαρδουλάκης Α.Ι., 2011, *Εισαγωγή στη Μαθηματική Θεωρία Συστημάτων και Ελέγχου*, Τόμος Α: Κλασική Θεωρία Ελέγχου, Εκδόσεις Τζιόλα.
- Πουλιέζος Αναστάσιος, 2013, *Περί Συστημάτων Ελέγχου. Εισαγωγικό Εγχειρίδιο της Σύγχρονης Θεωρίας Συστημάτων Αυτομάτου Ελέγχου*, ΕΚΔΟΣΕΙΣ Α. ΤΖΙΟΛΑ & ΥΙΟΙ Α.Ε.
- Norman Nise, 2011, *Control Systems Engineering*, 6th Edition, John Willey.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Νικόλαος Καραμπετάκης. «Κλασσική Θεωρία Ελέγχου. Ενότητα 15: Επίλυση διοφαντικών εξισώσεων πολυωνύμων». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

http://eclass.auth.gr/courses/OCRS432/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου
Θεσσαλονίκη, Χειμερινό εξάμηνο 2014-2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης