ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Λογισμός ΙΙ

Ενότητα 1: Λογισμός ΙΙ

Κ. Δασκαλογιάννης
Τμήμα Μαθηματικών

Α.Π.Θ.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο ʹΑνοικτά Ακαδημαικά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκηςʹ έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος ʹΕκπαίδευση και Δια Βίου Μάθησηʹ και συγχρηματοδοτείται απο την Ευρωπαική ʹΕνωση (Ευρωπαικό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Περιεχόμενα Ενότητας

- Αόριστο Ολοκλήρωμα.
- Αναδρομικές σχέσεις.
- Διαμερίσεις.
- Ολοκλήρωμα Darboux.
- Ολοκλήρωμα Riemann.
- Θεωρήματα Μέσης Τιμής.
- Γενικευμένο Ολοκλήρωμα.
- Ομοιόμορφη Σύγκλιση.
- Υπολογισμός Εμβαδού.
- Μήκος Καμπύλης.
- Υπολογισμός Όγκου.

Σκοποί Ενότητας

- Εισαγωγή των προπτυχιακών φοιτητών στην μελέτη και στις τεχνικές των ολοκληρωμάτων.

Ορισμός Αόριστου Ολοκληρώματος

Ορισμός

$f(x)$ είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα "διάστημα" $\mathbf{I}$

$$\mathbf{I} = [a, b] \text{ ή } (-\infty, b] \text{ ή } [a, \infty)$$

αόριστο ολοκλήρωμα $\boxed{F(x) = \int f(x)\,dx \iff \frac{dF}{dx} = F'(x) = f(x)}$

$F(x)$ *αντιπαράγωγος ή παράγουσα συνάρτηση*

Η παράγουσα συνάρτηση είναι κάποια συνεχής συνάρτηση

Παραδείγματα

- $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + c$
- $\int |x|\,dx = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + c & \text{αν } x \geq 0 \\ -\frac{x^2}{2} + c & \text{αν } x < 0 \end{cases}$
- $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$

Συμβολικός Λογισμός με διαφορικά

$$\frac{dF}{dx} = f(x) \rightsquigarrow dF = \left(\frac{dF}{dx}\right) dx = f(x)\,dx$$

$$F = \int dF = \int \left(\frac{dF}{dx}\right) dx = \int F'(x)\,dx$$

Το ολοκλήρωμα "αναιρεί" την παραγώγιση

$$\begin{array}{ccccc} \int x^2\,dx & = & \boxed{\int d\left(\frac{x^3}{3}\right)} & = & \boxed{\frac{x^3}{3}} \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ \int \left(\frac{dF}{dx}\right) dx & = & \int dF & = & F \end{array}$$

Θεώρημα

Η παράγουσα συνάρτηση $F(x)$ είναι *ορισμένη με προσέγγιση μιας σταθερας*:

$$F(x) \text{ παράγουσα συνάρτηση της } f(x)$$
$$\Downarrow$$
$$F(x) + c \text{ παράγουσα συνάρτηση της } f(x)$$

$$\frac{d}{dx}(F(x)) = \frac{d}{dx}(F(x) + c) = f(x)$$

Παρατήρηση 1

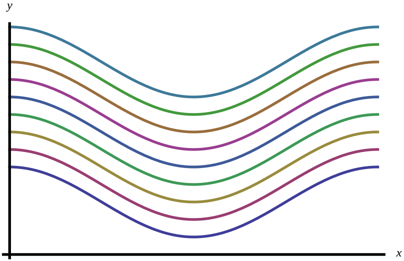
Η απεικόνιση: $f(x) \mapsto F(x)$ $\boxed{\text{ΔΕΝ}}$ είναι μονοσήμαντη πχ

$$\int x^4\,dx = \int d\left(\frac{x^5}{5}\right) = \frac{x^5}{5} + c$$

όπου c οποιαδήποτε σταθερά

$$\int \cos x\,dx = \int d(\sin x) = \sin x + c$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \int d(\arctan x) = \arctan x + c$$



Παραδείγματα 1 (Αόριστο Ολοκλήρωμα)

$$\int \frac{2x^2 - 3x + 1}{x+1}\, dx = \int \left(2x - 5 + \frac{6}{x+1}\right) dx = x^2 - 5x + 6 \ln|x+1| + C$$

$$\frac{1}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{a-b}\frac{(x+a)-(x+b)}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{x+b} - \frac{1}{x+a}\right)$$

$$\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{a-b} \ln\left|\frac{x+b}{x+a}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2+3x+2} = \int \frac{dx}{(x+1)(x+2)} = \ln\left|\frac{x+2}{x+3}\right| + C$$

Πίνακας Παραγουσών

	παράγουσα
$f(x) = \frac{dF}{dx}$	$F(x) = \int f(x)\,dx$
$x^p,\ p \neq -1$	$\frac{x^{p+1}}{p+1} + c$
$\frac{1}{x}$	$\ln\|x\| + c$
e^x	$\mathrm{e}^x + c$
$\cos x$	$\sin x + c$
$\sin x$	$-\cos x + c$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + c$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$\cot x + c$

Πίνακας Ολοκληρωμάτων

$\displaystyle\int x^p\,dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + c \quad p \neq -1$	$\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\|x\| + c$
$\displaystyle\int \mathrm{e}^x\,dx = \mathrm{e}^x + c$	
$\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x + c$	$\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x + c$
$\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + c$	$\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + c$
$\displaystyle\int \cosh x\,dx = \sinh x + c$	$\displaystyle\int \sinh x\,dx = \cosh x + c$
$\displaystyle\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh x + c$	$\displaystyle\int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\coth x + c$
$\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$	$\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\arccos x + c$
$\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + c$	$\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = -\mathrm{arccot}\, x + c$
$\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \mathrm{arcsinh}\, x + c$	$\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \mathrm{arccosh}\, x + c$
$\displaystyle\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \mathrm{arctanh}\, x + c$ για $\|x\| < 1$	$\displaystyle\int \frac{1}{x^2-1}\,dx = -\mathrm{arccoth}\, x + c$ για $\|x\| > 1$

Βασικές ιδιότητες ολοκληρωμάτων

$$\int \alpha f(x)\, dx = \alpha \int f(x)\, dx$$

$$\int \{f(x) + g(x)\}\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$$

Ολοκλήρωση με αντικατάσταση μεταβλητής

$$\int g(u)\, du \underbrace{=} \int g(u) \frac{du}{dx}\, dx =_{u=u(x)} \int g\left(u(x)\right) u'(x)\, dx$$

Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

$$\int f(x)\, g'(x)\, dx = f(x)\, g(x) - \int g(x)\, f'(x)\, dx$$

$$\int f(x)\, dg(x) = f(x)\, g(x) - \int g(x)\, df(x)$$

Παραδείγματα 2 (Αόριστο Ολοκλήρωμα)

$$\int \frac{ax+b}{cx+d}\,dx = \int \frac{\frac{a}{c}(cx+d) + \frac{bc-ad}{c}}{cx+d}\,dx =$$
$$= \frac{a}{c}\int dx + \frac{bc-ad}{c}\int \frac{dx}{cx+d} = \frac{ax}{c} + \frac{bc-ad}{c^2}\int \frac{d\,(cx+d)}{cx+d}$$
$$= \frac{ax}{c} + \frac{bc-ad}{c^2}\ln|cx+d| + c$$

$$\int P(x)\mathrm{e}^x\,dx = P(x)\mathrm{e}^x - \int P(x)\mathrm{e}^x\,dx$$

$$\int P(x)\mathrm{e}^x\,dx = \left(P(x) - P'(x) + P''(x) - P^{(3)}(x) + \cdots\cdots\right)\mathrm{e}^x + c$$

$$\int x^3\mathrm{e}^x\,dx = \left(x^3 - 3x^2 + 6x + 6\right)\mathrm{e}^x + c$$

$$\int P(x)\mathrm{e}^{-x}\,dx = \left(-P(x) - P'(x) - P''(x) - P^{(3)}(x) + \cdots\cdots\right)\mathrm{e}^{-x} + c$$

Βασικές ιδιότητες ολοκληρωμάτων-αποδείξεις (1)

$$\int \alpha f(x)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx$$

Απόδειξη.

$$\begin{aligned}
\frac{d\left(\int \alpha f(x)\,dx\right)}{dx} &= \alpha f(x) \\
&\Updownarrow \\
\frac{d\left(\alpha \int f(x)\,dx\right)}{dx} &= \alpha \frac{d\left(\int f(x)\,dx\right)}{dx} = \alpha f(x)
\end{aligned}$$

□

$$\int \{f(x) + g(x)\}\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

Απόδειξη.

$$\frac{d\left\{\int (f(x)+g(x))\,dx\right\}}{dx} = f(x) + g(x)$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{d\left\{\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx\right\}}{dx} =$$

$$= \frac{d\left(\int f(x)\,dx\right)}{dx} + \frac{d\left(\int g(x)\,dx\right)}{dx} = f(x) + g(x)$$

□

Βασικές ιδιότητες ολοκληρωμάτων-αποδείξεις (2)

Ολοκλήρωση με αντικατάσταση μεταβλητής

$$\begin{aligned}\int g(u)\,du \underbrace{=}_{u=u(x)} & \int g\left(u(x)\right) u'(x)\,dx = \\ = & \int g\left(u(x)\right) \frac{du(x)}{dx}\,dx = \\ = & \int g\left(u(x)\right)\, du(x)\end{aligned}$$

πχ

$$\begin{aligned}\int \tan\, x\, dx = & \int \frac{\sin\, x\, dx}{\cos\, x} = -\int \frac{d\left(\cos\, x\right)}{\cos\, x} = \\ & \underbrace{=}_{u=\cos\, x} -\int \frac{du}{u} = -\ln\,|u| + c = \\ & = \ln\, \frac{1}{|\cos\, x|} + c\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx = & \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x^2+a^2\right)}{\sqrt{x^2+a^2}} = \\ & \underbrace{=}_{u=x^2+a^2} \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = \sqrt{u} + c = \\ & = \sqrt{x^2+a^2} + c\end{aligned}$$

Βασικές ιδιότητες ολοκληρωμάτων-αποδείξεις (3)

Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

$$\int d(fg) = \int fdg + \int gdf$$

$$\rightsquigarrow \boxed{\int f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int g(x)\,f'(x)\,dx}$$

πχ

$$\begin{aligned}\int x\,\mathrm{e}^{-x}\,dx &= -\int x\,d\left(\mathrm{e}^{-x}\right) = \\ &= -x\,\mathrm{e}^{-x} + \int \mathrm{e}^{-x}\,dx = -x\,\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \ln x\,dx &= x \ln x - \int x\,d(\ln x) = \\ &= x \ln x - \int \frac{x}{x}\,dx = x \ln x - x\end{aligned}$$

Ολοκληρώματα με αντικατάσταση μεταβλητής

$$\boxed{\int f(u(x))\, u'(x)\, dx = \int f(u)\, du}$$

$$\int f(\alpha x + \beta)\, dx \underbrace{=}_{u=\alpha x+\beta} \frac{1}{\alpha} \int f(u)\, du$$

$$\int f\left(\mathrm{e}^x\right)\, dx \underbrace{=}_{u=\mathrm{e}^x} \int \frac{f(u)}{u}\, du$$

$$\int \frac{f(\ln\, x)}{x}\, dx \underbrace{=}_{u=\ln\, x} \int f(u)\, du$$

Αναδρομικές σχέσεις με εκθετικές εξισώσεις

$$I_n = \int x^n \, \mathrm{e}^{\alpha x} \, dx$$

$$I_0 = \frac{1}{\alpha} \mathrm{e}^{\alpha x}$$

$$I_n = \frac{1}{\alpha} \int x^n \, d\left(\mathrm{e}^{\alpha x}\right) \, dx = \frac{1}{\alpha} x^n \, \mathrm{e}^{\alpha x} - \frac{n}{\alpha} \int x^{n-1} \, \mathrm{e}^{\alpha x} \, dx$$

$$I_n = \frac{1}{\alpha} x^n \, \mathrm{e}^{\alpha x} - \frac{n}{\alpha} I_{n-1}$$

κατασκευάζουμε διαδοχικά το $I_1, \; I_2, \; \ldots \; I_n$

Μέθοδος προσδιοριστέων συντελεστών

$$I = \int P(x)\,\mathrm{e}^{\alpha x}\,dx \qquad P(x) \text{ πολυώνυμο βαθμού } n$$

$$\int P(x)\,\mathrm{e}^{\alpha x}\,dx = R(x)\mathrm{e}^{\alpha x} + c$$

$$\frac{d\left(R(x)\mathrm{e}^{\alpha x}\right)}{dx} = P(x)\mathrm{e}^{\alpha x} \;\rightsquigarrow\; R'(x) + \alpha R(x) = P(x)$$

πχ

$$\int x^2\,\mathrm{e}^{3x}\,dx \;=\; \left(Ax^2 + Bx + C\right)\mathrm{e}^{3x} + c$$

$$\boxed{\frac{d\left\{\left(Ax^2 + Bx + C\right)\mathrm{e}^{3x}\right\}}{dx} = x^2\mathrm{e}^{3x}}$$

$$(2Ax + B) + 3\left(Ax^2 + Bx + C\right) = x^2$$

$$\left.\begin{array}{r} 3A = 1 \\ 2A + 3B = 0 \\ B + 3C = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \; A = \frac{1}{3}, \quad B = -\frac{2}{9}, \quad C = \frac{2}{27}$$

Μέθοδος προσδιοριστέων συντελεστών- Απόδειξη

$$I = \int P(x)\,\mathrm{e}^{\alpha x}\,dx \qquad P(x) \text{ πολυώνυμο βαθμού } n$$

Κάνοντας μια ολοκλήρωση κατά μέρη:

$$\begin{aligned} I &= \int P(x)\,\mathrm{e}^{\alpha x}\,dx = \tfrac{1}{\alpha}\int P(x)\,d\mathrm{e}^{\alpha x} = \\ &= \tfrac{1}{\alpha}P(x)\mathrm{e}^{\alpha x} - \tfrac{1}{\alpha}\int P'(x)\,\mathrm{e}^{\alpha x}\,dx \end{aligned}$$

Το $P'(x)$ είναι πολυώνυμο βαθμού $n-1$. Επαναλαμβάνοντας την ολοκλήρωση κατά μέρη:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\alpha}\underbrace{P(x)}_{\text{πολ. βαθμού } n}\mathrm{e}^{\alpha x} - \frac{1}{\alpha}\int P'(x)\,\mathrm{e}^{\alpha x}\,dx = \\ &= \underbrace{\left(\frac{1}{\alpha}P(x) - \frac{1}{\alpha^2}P'(x)\right)}_{\text{πολ. βαθμού } n-1}\mathrm{e}^{\alpha x} + \frac{1}{\alpha^2}\int P''(x)\,\mathrm{e}^{\alpha x}\,dx \\ &= \text{.... κλπ κλπ} = \\ &= R(x)\mathrm{e}^{\alpha x} + c \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ $R(x)$ πολυώνυμο βαθμού n

$$\frac{d\left(R(x)\mathrm{e}^{\alpha x}\right)}{dx} = P(x)\mathrm{e}^{\alpha x} \rightsquigarrow \boxed{R'(x) + \alpha R(x) = P(x)}$$

Αναδρομικές σχέσεις τριγωνομετρικών συναρτήσεων

$$S_n = \int x^n \sin(\alpha x + \beta)\, dx \quad S_0 = -\frac{\cos(\alpha x + \beta)}{\alpha}$$

$$C_n = \int x^n \cos(\alpha x + \beta)\, dx \quad C_0 = \frac{\sin(\alpha x + \beta)}{\alpha}$$

$$\begin{aligned} S_n &= -\tfrac{1}{\alpha} \int x^n \, d\cos(\alpha x + \beta) = \\ &= -\tfrac{1}{\alpha} x^n \cos(\alpha x + \beta) + \tfrac{n}{\alpha} \int x^{n-1} \cos(\alpha x + \beta)\, dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_n &= \tfrac{1}{\alpha} \int x^n \, d\sin(\alpha x + \beta) = \\ &= \tfrac{1}{\alpha} x^n \sin(\alpha x + \beta) - \tfrac{n}{\alpha} \int x^{n-1} \sin(\alpha x + \beta)\, dx \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} S_n &= -\tfrac{1}{\alpha} x^n \cos(\alpha x + \beta) + \tfrac{n}{\alpha} C_{n-1} \\ C_n &= \tfrac{1}{\alpha} x^n \sin(\alpha x + \beta) - \tfrac{n}{\alpha} S_{n-1} \end{aligned}}$$

κατασκευάζουμε διαδοχικά τα $S_0,\ C_0,\ S_1,\ C_1,\ S_2,\ C_2,\ \ldots\ S_n,\ C_n,$

Προσδιοριστέοι συντελεστές (1)

$$S_n = \int x^n \sin(\alpha x + \beta)\, dx$$

$$S_n = P_n(x)\sin(\alpha x + \beta) + Q_n(x)\cos(\alpha x + \beta)$$

$P_n(x),\ Q_n(x)$ πολυώνυμα βαθμού n

$$x^n \sin(\alpha x + \beta) = \\ = \frac{d}{dx}\left\{P_n(x)\sin(\alpha x + \beta) + Q_n(x)\cos(\alpha x + \beta)\right\}$$

$$C_n = \int x^n \cos(\alpha x + \beta)\, dx$$

$$C_n = \widetilde{P}_n(x)\sin(\alpha x + \beta) + \widetilde{Q}_n(x)\cos(\alpha x + \beta)$$

$\widetilde{P}_n(x),\ \widetilde{Q}_n(x)$ πολυώνυμα βαθμού n

$$x^n \cos(\alpha x + \beta) = \\ = \frac{d}{dx}\left\{\widetilde{P}_n(x)\sin(\alpha x + \beta) + \widetilde{Q}_n(x)\cos(\alpha x + \beta)\right\}$$

ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

$$\exp(x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \rightsquigarrow \exp(x+y) = (\exp x)(\exp y)$$

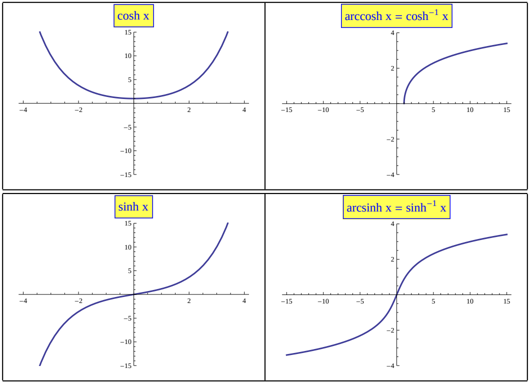
$$\cosh x \equiv \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sinh x \equiv \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ (2)

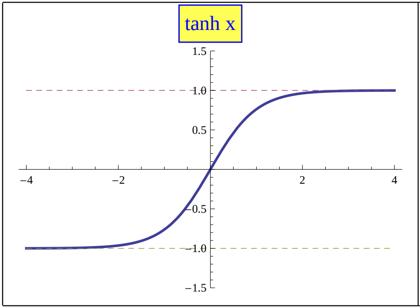
$$\cosh x \equiv \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \sinh x \equiv \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

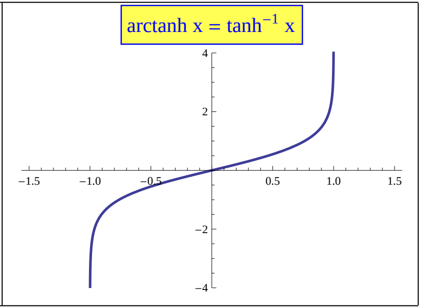
$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$



ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ (3)

$$\tanh\ x \equiv \frac{\sinh\ x}{\cosh\ x}$$





ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ (4)

$$\frac{d\cosh\ x}{dx} = \sinh\ x, \quad \frac{d\sinh\ x}{dx} = \cosh\ x$$

$$\frac{d\cosh^{-1}\ x}{dx} = \frac{d\,\mathrm{arccosh}\,x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d\sinh^{-1}\ x}{dx} = \frac{d\,\mathrm{arcsinh}\,x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\frac{d\tanh\ x}{dx} = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

$$\frac{d\tanh^{-1} x}{dx} = \frac{d\,\mathrm{arctanh}\,x}{dx} = \frac{1}{1-x^2}, \quad |x| < 1$$

$$\frac{d\coth\ x}{dx} = -\frac{1}{\sinh^2 x}$$

$$\frac{d\coth^{-1} x}{dx} = \frac{d\,\mathrm{arccoth}\,x}{dx} = \frac{1}{1-x^2}, \quad |x| >$$

Αναδρομικές σχέσεις υπερβολικών συναρτήσεων

$$S_n = \int x^n \sinh(\alpha x + \beta)\, dx \quad S_0 = \frac{\cosh(\alpha x + \beta)}{\alpha}$$

$$C_n = \int x^n \cosh(\alpha x + \beta)\, dx \quad C_0 = \frac{\sinh(\alpha x + \beta)}{\alpha}$$

$$\begin{aligned} S_n &= \tfrac{1}{\alpha} \int x^n \, d\cosh\,(\alpha x + \beta) = \\ &= \tfrac{1}{\alpha} x^n \cosh(\alpha x + \beta) - \tfrac{n}{\alpha} \int x^{n-1} \cosh\,(\alpha x + \beta)\, dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_n &= \tfrac{1}{\alpha} \int x^n \, d\sinh\,(\alpha x + \beta) = \\ &= \tfrac{1}{\alpha} x^n \sinh(\alpha x + \beta) - \tfrac{n}{\alpha} \int x^{n-1} \sinh\,(\alpha x + \beta)\, dx \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} S_n &= \tfrac{1}{\alpha} x^n \cosh(\alpha x + \beta) - \tfrac{n}{\alpha} C_{n-1} \\ C_n &= \tfrac{1}{\alpha} x^n \sinh(\alpha x + \beta) - \tfrac{n}{\alpha} S_{n-1} \end{aligned}}$$

κατασκευάζουμε διαδοχικά τα $S_0,\ C_0,\ S_1,\ C_1,\ S_2,\ C_2,\ \ldots\ S_n,\ C_n,$

Προσδιοριστέοι συντελεστές (2)

$$S_n = \int x^n \sinh(\alpha x + \beta)\ dx$$

$$S_n = P_n(x)\sinh(\alpha x + \beta) + Q_n(x)\cosh(\alpha x + \beta)$$

$P_n(x),\ Q_n(x)$ πολυώνυμα βαθμού n

$$\begin{aligned} & x^n \sinh(\alpha x + \beta) = \\ & = \tfrac{d}{dx}\left\{P_n(x)\sinh(\alpha x + \beta) + Q_n(x)\cosh(\alpha x + \beta)\right\} \end{aligned}$$

$$C_n = \int x^n \cosh(\alpha x + \beta)\ dx$$

$$C_n = \widetilde{P}_n(x)\sinh(\alpha x + \beta) + \widetilde{Q}_n(x)\cosh(\alpha x + \beta)$$

$\widetilde{P}_n(x),\ \widetilde{Q}_n(x)$ πολυώνυμα βαθμού n

$$\begin{aligned} & x^n \cosh(\alpha x + \beta) = \\ & = \tfrac{d}{dx}\left\{\widetilde{P}_n(x)\sinh(\alpha x + \beta) + \widetilde{Q}_n(x)\cosh(\alpha x + \beta)\right\} \end{aligned}$$

Προσδιοριστέοι συντελεστές για πολυώνυμα, εκθετικές και τριγωνομετρικές συναρτήσεις

$$\int \Pi_n(x)\,\mathrm{e}^{bx}\sin\,ax\,dx = P_n(x)\mathrm{e}^{bx}\sin\,ax + Q_n(x)\mathrm{e}^{bx}\cos\,ax$$

$$\Pi_n(x)\,\mathrm{e}^{bx}\sin\,ax = \frac{d}{dx}\left(P_n(x)\mathrm{e}^{bx}\sin\,ax + Q_n(x)\mathrm{e}^{bx}\cos\,ax\right)$$

$$\int \Sigma_n(x)\,\mathrm{e}^{bx}\cos\,ax\,dx = R_n(x)\mathrm{e}^{bx}\sin\,ax + S_n(x)\mathrm{e}^{bx}\cos\,ax$$

$$\Sigma_n(x)\,\mathrm{e}^{bx}\cos\,ax = \frac{d}{dx}\left(R_n(x)\mathrm{e}^{bx}\sin\,ax + S_n(x)\mathrm{e}^{bx}\cos\,ax\right)$$

Ολες οι συναρτήσεις είναι πολυώνυμα n-τάξης ως προς x.

ΣΕΙΡΕΣ MACLAURIN

$$\exp(x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \rightsquigarrow \exp(x+y) = (\exp x)(\exp y)$$

$$\cosh x \equiv \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sinh x \equiv \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\exp(i\,x) = e^{i\,x} = \sum_{n=0}^{\infty} i^{\,n} \frac{x^n}{n!} \rightsquigarrow \exp i\,(x+y) = (\exp i\,x)(\exp i\,y)$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Ιδιότητες τριγωνομετρικών- υπερβολικών συναρτήσεων

$$\cosh x \equiv \frac{e^{x}+e^{-x}}{2} \qquad \sinh x \equiv \frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$$

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \qquad \sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$$

$$\begin{aligned}
\cos^3 x &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3 = \\
&= \frac{e^{3ix}+e^{-3ix}}{8} + \frac{3}{8}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right) = \\
&= \frac{\cos 3x}{4} + \frac{3\cos x}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\sinh 5x}{\sinh x} &= \frac{(e^{x})^5-(e^{-x})^5}{e^{x}-e^{-x}} = \\
&= (e^{x})^4+(e^{x})^3(e^{-x})+(e^{x})^2(e^{-x})^2+(e^{x})(e^{-x})^3+(e^{-x})^4 = \\
&= 2\cosh 4x + 2\cosh 2x + 1
\end{aligned}$$

Προσδιοριστέοι συντελεστές (3)

Προσδιοριστέοι συντελεστές

$$\int x^n\, \mathrm{e}^{bx} \sin\, ax\, dx =$$
$$= P_n(x)\mathrm{e}^{bx} \sin\, ax + Q_n(x)\mathrm{e}^{bx} \cos\, ax$$
$$\int x^n\, \mathrm{e}^{bx} \cos\, ax\, dx =$$
$$= R_n(x)\mathrm{e}^{bx} \sin\, ax + S_n(x)\mathrm{e}^{bx} \cos\, ax$$

Υπολογισμός του $\int x^2 \mathrm{e}^{5x} \sin^3(2x) \cos^3 x\, dx$

1^0 βήμα: Αναλύω το $\sin^3(2x) \cos^3 x$ σε άθροισμα ημιτόνων και συνημιτόνων

2^0 βήμα: Υπολογίζω ολοκληρώματα της μορφής $\int P(x)\mathrm{e}^{bx} \sin\, ax\, dx$ και $\int Q(x)\mathrm{e}^{bx} \cos\, ax\, dx$ με προσδιοριστέους συντελεστές

Προσδιοριστέοι συντελεστές (4)

$$\sin\,(a+b) = \sin\,a\cos\,b + \cos\,a\sin\,b$$
$$\cos\,(a+b) = \cos\,a\cos\,b - \sin\,a\sin\,b$$

$$\int \sin(ax)\cos(bx)\,dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int \left(\sin(a+b)x + \sin(a-b)x\right)\,dx$$

$$\int \cos(ax)\cos(bx)\,dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int \left(\cos(a-b)x + \cos(a+b)x\right)\,dx$$

$$\int \sin(ax)\sin(bx)\,dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int \left(\cos(a-b)x - \cos(a+b)x\right)\,dx$$

ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΜΕ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ (1)

Αναδρομικές σχέσεις

$$\int \cos^{2m} x \, dx = \frac{\cos^{2m-1} x \sin x}{2m} + \frac{2m-1}{2m} \int \cos^{2m-2} x \, dx$$

$$C_m(x) = \int \cos^{2m} x \, dx,$$

$$C_0(x) = x, \quad C_m(x) = \frac{\cos^{2m-1} x \sin x}{2m} + \frac{2m-1}{2m} C_{m-1}(x)$$

$$\cos^n x = \left(\frac{\mathrm{e}^{i x} + \mathrm{e}^{-i x}}{2} \right)^n$$

$$\int \cos^{2m} x \, dx = \frac{1}{2^{2m}} \left(\binom{2m}{m} x + \sum_{k=0}^{m-1} \binom{2m}{k} \frac{\sin(2(m-k)x)}{m-k} \right)$$

$$\int \cos^{2n+1} x \, dx = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{\sin^{2k+1} x}{2k+1}$$

ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΜΕ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ (2)

$$C_m(x) = \int \cos^{2m} x \, dx,$$

$$C_0(x) = x, \quad C_m(x) = \frac{\cos^{2m-1} x \sin x}{2m} + \frac{2m-1}{2m} C_{m-1}(x)$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ: Ολοκληρώματα απλών κλασμάτων

$$D_n = \int \frac{dx}{(x^2+b^2)^n} \underset{(x=b\tan t)}{\longrightarrow} D_n = \frac{1}{b^{2n-1}} \int \cos^{2(n-1)} t \, dt$$

$$D_n = \frac{C_{n-1}\left(\arctan \frac{x}{b}\right)}{b^{2n-1}}$$

$$\cos\left(\arctan \frac{x}{b}\right) = \frac{b}{\sqrt{x^2+b^2}}, \; \sin\left(\arctan \frac{x}{b}\right) = \frac{x}{\sqrt{x^2+b^2}}$$

ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΜΕ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ (3)

$$F_m(x) = \int \cosh^{2m} x \, dx,$$

$$F_0(x) = x, \quad F_m(x) = \frac{\cosh^{2m-1} x \sinh x}{2m} + \frac{2m-1}{2m} C_{m-1}(x)$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ: Ολοκληρώματα απλών κλασμάτων, $b > |x|$

$$G_n = \int \frac{dx}{\left(b^2 - x^2\right)^n} \underset{(x = b \tanh t)}{\longrightarrow} G_n = \frac{1}{b^{2n-1}} \int \cosh^{2(n-1)} t \, dt$$

$$G_n = \frac{F_{n-1}\left(\operatorname{arctanh}\frac{x}{b}\right)}{b^{2n-1}}$$

$$\cosh\left(\operatorname{arctanh}\frac{x}{b}\right) = \frac{b}{\sqrt{b^2 - x^2}}, \ \sin\left(\operatorname{archtanh}\frac{x}{b}\right) = \frac{x}{\sqrt{b^2 - x^2}}$$

ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΜΕ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ (4)

$$L_m(x) = \int \sinh^{2m} x \, dx,$$

$$L_0(x) = x, \quad L_m(x) = \frac{\sinh^{2m-1} x \cosh x}{2m} - \frac{2m-1}{2m} L_{m-1}(x)$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ: Ολοκληρώματα απλών κλασμάτων, $b < |x|$

$$M_n = \int \frac{dx}{(x^2 - b^2)^n} \underset{(x = b \coth t)}{\longrightarrow} M_n = \frac{1}{b^{2n-1}} \int \sinh^{2(n-1)} t \, dt$$

$$M_n = \frac{L_{n-1}\left(\mathrm{arccoth} \frac{x}{b}\right)}{b^{2n-1}}$$

$$\sinh\left(\mathrm{arccoth} \frac{x}{b}\right) = \frac{b}{\sqrt{x^2 - b^2}}, \ \sin\left(\mathrm{arccoth} \frac{x}{b}\right) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - b^2}}$$

ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΜΕ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ (5)

$$\int \sin^{2m} x\,dx = -\frac{\sin^{2m-1} x \cos x}{2m} + \frac{2m-1}{2m} \int \sin^{2(m-1)} x\,dx$$

$$S_m(x) = \int \sin^{2m} x\,dx,$$

$$S_0(x) = x, \quad S_m(x) = -\frac{\sin^{2m-1} x \cos x}{2m} + \frac{2m-1}{2m} S_{m-1}(x)$$

$$\sin^n x = \left(\frac{\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix}}{2i} \right)^n$$

$$\int \sin^{2n+1} x\,dx = -\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{\cos^{2k+1} x}{2k+1}$$

ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΜΕ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ (6)

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \qquad \frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x$$

$$\int \tan^n x\, dx = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - \int \tan^{n-2} x\, dx$$

$$\int \cot^n x\, dx = -\frac{\cot^{n-1} x}{n-1} - \int \cot^{n-2} x\, dx$$

ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΜΕ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ (7)

$$\int \sin^{2n+1} x \, dx = -\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{\cos^{2k+1} x}{2k+1}$$

$$\int \frac{dx}{\cos^{2(n+1)} x} \, dx = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{\tan^{2k+1} x}{2k+1}$$

$$\int \frac{dx}{\sin^{2(n+1)} x} \, dx = -\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{\cot^{2k+1} x}{2k+1}$$

ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ 'ΑΠΛΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ'

$$\boxed{\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + c}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^{n+1}} = {} & \frac{1}{2na^2}\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^{n}} + \\ & + \frac{2n-1}{2na^2}\int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^{n}}\end{aligned}}$$

Εναλλακτικός τρόπος υπολογισμού $x = a\tan t$

$$\boxed{\int \frac{xdx}{\left(x^2\pm a^2\right)^{n}} = \begin{cases} \ln\sqrt{\left|x^2\pm a^2\right|} + c & \text{για } n=1 \\ -\frac{1}{2(n-1)}\frac{1}{\left(x^2\pm a^2\right)^{n-1}} & \text{για } n>1 \end{cases}}$$

ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΄ΑΠΛΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ΄ (2)

$$\boxed{\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \int \frac{dx}{\left(x^2 - a^2\right)^{n+1}} = & -\frac{1}{2na^2} \frac{x}{\left(x^2 - a^2\right)^n} + \\ & -\frac{2n-1}{2na^2} \int \frac{dx}{\left(x^2 - a^2\right)^n} \end{aligned}}$$

Εναλλακτικός τρόπος υπολογισμού $x = a \tanh t$

$$\int \frac{dx}{\left(x^2 + 2\alpha x + \beta\right)^n} = \int \frac{dx}{\left((x+\alpha)^2 + \beta - \alpha^2\right)^n} = \cdots$$

$$\int \frac{x dx}{\left(x^2 + 2\alpha x + \beta\right)^n} = \int \frac{\left((x+\alpha) - \alpha\right) dx}{\left((x+\alpha)^2 + \beta - \alpha^2\right)^n}$$

Ανάλυση πολυωνύμου

Κάθε πολυώνυμο αναλύεται σε ¨απλά' πολυώνυμα:

$$Q(x) = A \prod_{k=1}^{p} (x - \rho_k)^{m_k} \prod_{\ell=1}^{q} \left(x^2 + 2\alpha_\ell x + \beta_\ell\right)^{n_\ell}$$

$$\rho_k \quad \textbf{ρίζες} \;, \quad \alpha_\ell^2 < \beta_\ell$$

$$\text{βαθμός } (Q(x)) = n = \sum_{k=1}^{p} m_k + 2 \sum_{\ell=1}^{q} n_\ell$$

Ανάλυση ρητής συνάρτησης

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \cdots + p_m x^m}{q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + \cdots + q_n x^n}$$

Αν βαθμός $P(x) <$ βαθμός $Q(x)$ δηλ. $m < n$, το $R(x)$ αναλύεται σε ¨απλά' κλάσματα

$$\begin{aligned} R(x) = \; & \tfrac{A_{11}}{x-\rho_1} + \tfrac{A_{12}}{(x-\rho_1)^2} + \cdots + \tfrac{A_{1m_1}}{(x-\rho_1)^{m_1}} + \\ & + \cdots \quad \text{για όλες τις ρίζες} \quad \cdots + \\ & + \tfrac{B_{11}x+\Gamma_{11}}{x^2+2\alpha_1 x+\beta_1} + \tfrac{B_{12}x+\Gamma_{12}}{(x^2+2\alpha_1 x+\beta_1)^2} + \cdots + \\ & \qquad\qquad + \cdots + \tfrac{B_{1n_1}x+\Gamma_{1n_1}}{(x^2+2\alpha_1 x+\beta_1)^{n_1}} + \\ & + \cdots \quad \text{για όλα τα τριώνυμα} \quad \cdots \end{aligned}$$

Από την ταυτότητα $Q(x)R(x) = P(x)$ βρίσκουμε τους άγνωστους συντελεστές A_{ik}, $B_{j\ell}$, $\Gamma_{j\ell}$.

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$I = \int R\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}, \frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) e^{-x}\, d\left(e^x\right)$$

$$\boxed{t = e^x} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\boxed{\int \underbrace{R\left(\frac{t + \frac{1}{t}}{2}, \frac{t - \frac{1}{t}}{2}\right) \frac{1}{t}}_{\text{συνάρτηση του } t}\, dt}}$$

$$\boxed{\boxed{t = \tan x}}$$

$$dt = \frac{1}{\cos^2 x}\,dx, \qquad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

$$\int R(\cos^2 x, \sin^2 x)\,dx = \int \frac{R\left(\frac{1}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}{1+t^2}\,dt$$

$$\boxed{\boxed{t = \tan \frac{x}{2}}}$$

$$\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}}$$

$$\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}} = 1 + \tan^2\frac{x}{2} = 1 + t^2$$

$$\begin{aligned} \sin x &= 2\cos\tfrac{x}{2}\sin\tfrac{x}{2} \\ &= 2\cos^2\tfrac{x}{2}\tan\tfrac{x}{2} \end{aligned} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\sin x = \frac{2t}{1+t^2}}$$

$$dt = \frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{dx = \frac{2dt}{1+t^2}}$$

$$\boxed{\boxed{I = \int R(\cos x, \sin x)\, dx = 2\int \frac{R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)}{1+t^2}\, dt}}$$

Ολοκληρώματα (1)

Ολοκλήρωμα $\displaystyle\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)\, dx$

$$t^n = \frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$$

Ολοκλήρωμα $\displaystyle\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}, \sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right) dx$

$$t^p = \frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}, \quad p = \text{ Ε. Κ. Π. } (n, m)$$

Ολοκληρώματα (2)

Ολοκλήρωμα $\int R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right) dx$

$$x = a \sin\theta$$
$$\rightsquigarrow \ a \int R\left(a\sin\theta,\ a\cos\theta\right) \cos\theta \, d\theta$$

Ολοκλήρωμα $\int R\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right) dx$

$$x = a \cosh u$$
$$\rightsquigarrow \ a \int R\left(a\cosh u,\ a\sinh u\right) \sinh u \, du$$

Ολοκλήρωμα $\int R\left(x, \sqrt{a^2 + x^2}\right) dx$

$$x = a \sinh u \quad \text{ή} \quad x = a \tan\theta$$
$$\rightsquigarrow \ a \int R\left(a\sinh u,\ a\cosh u\right) \cosh u \, du$$

$$\int \frac{dx}{(x-\rho)^n} = \begin{cases} c \ln|x-\rho| \quad , \ n=1 \\ -\dfrac{1}{(n-1)(x-\rho)^{n-1}} \quad , \ n>1 \end{cases}$$

$$\int \frac{xdx}{(x^2 \pm a^2)^n} = \begin{cases} \ln \sqrt{|x^2 \pm a^2|} + c \quad n=1 \\ -\frac{1}{2(n-1)} \frac{1}{(x^2 \pm a^2)^{n-1}} \quad n>1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} R(x) = \; & \tfrac{A_{11}}{x-\rho_1} + \tfrac{A_{12}}{(x-\rho_1)^2} + \cdots + \tfrac{A_{1m_1}}{(x-\rho_1)^{m_1}} + \\ & + \cdots \quad \text{για όλες τις ρίζες} \quad \cdots + \\ & + \tfrac{B_{11}x+\Gamma_{11}}{x^2+2\alpha_1 x+\beta_1} + \tfrac{B_{12}x+\Gamma_{12}}{(x^2+2\alpha_1 x+\beta_1)^2} + \cdots + \\ & \qquad + \cdots + \tfrac{B_{1n_1}x+\Gamma_{1n_1}}{(x^2+2\alpha_1 x+\beta_1)^{n_1}} + \\ & + \cdots \quad \text{για όλα τα τριώνυμα} \quad \cdots \end{aligned}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}} \underset{x=a\tan t}{=} \frac{1}{a^{2n+1}} \int \cos^{2n} t \, dt$$

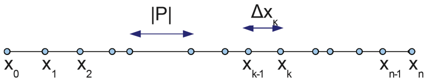
$$\int \cos^{2m} x \, dx, = \frac{\cos^{2m-1} x \sin x}{2m} + \frac{2m-1}{2m} \int \cos^{2(m-1)} x \, dx$$

Διαμερίσεις (1)

Ορισμός: Διαμέριση

Διαμέριση (Partition) ορισμένη στο διάστημα $I = [a,\ b]$

$$P = \{x_0,\, x_1,\, x_2, \ldots, x_n\}\,, \qquad a \,=\, x_0 \,<\, x_1 \,<\, \ldots \,<\, x_n = b$$



Ορισμός: λεπτότητα διαμέρισης

norm (λεπτότητα) διαμέρισης (Partition norm (mesh))

$$|P| \,=\, \max\left\{\triangle x_1,\, \triangle x_2, \ldots, \triangle x_n\right\}, \triangle x_k \,\equiv\, x_k \,-\, x_{k-1}$$

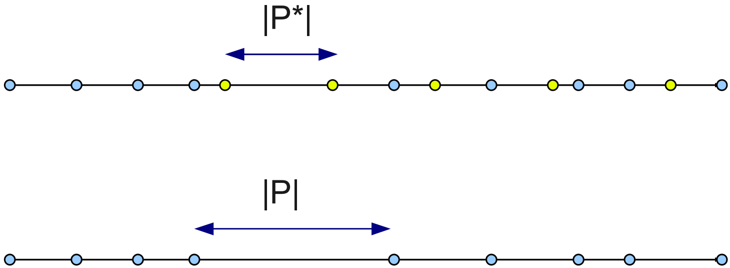
Ορισμός: μήκος διαμέρισης

διάσταση (μήκος) διαμέρισης (Part. dimension (length))

$$d(P) = n \,\rightsquigarrow\, d(P)|P| \geq b - a$$

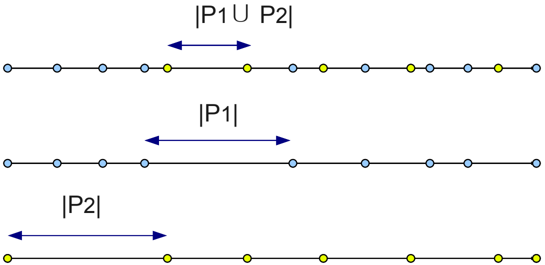
Διαμερίσεις (2)

$$\{P^* \quad \text{λεπτότερη} \quad P\} \Leftrightarrow \{P^* \supset P\} \rightsquigarrow \{|P^*| \leq |P|, \quad d(P^*) > d(P)\}$$



Διαμερίσεις (3)

- $|P_1 \bigcup P_2| \leq \min\left(|P_1|, |P_2|\right)$
- $d\left(P_1 \bigcup P_2\right) \leq d(P_1) + d(P_2)$



- $|P_1 \bigcap P_2| \geq \max\left(|P_1|, |P_2|\right)$
- $d\left(P_1 \bigcap P_2\right) \leq \min\left(d(P_1), d(P_2)\right)$

Φραγμένη Συνάρτηση

$f(x)$ φραγμένη συνάρτηση $f\,:\,[a,\,b]\,\rightarrow\,\mathbb{R}$

$$m \le f(x) \le M \quad \text{ή} \quad |f(x)| < B$$

$$m = \inf_{a \le x \le b} f(x), \quad M = \sup_{a \le x \le b} f(x)$$

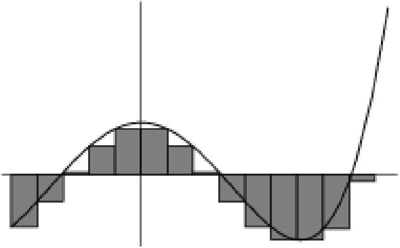
Κάτω άθροισμα

Ορισμός κάτω αθροίσματος

κάτω άθροισμα (low sum) της φραγμένης συνάρτησης πάνω σε μια διαμέριση P

$$L(P,f) = \sum_{k=1}^{n} m_k \triangle x_k$$

$$m_k = \inf \{f(x),\, x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$$



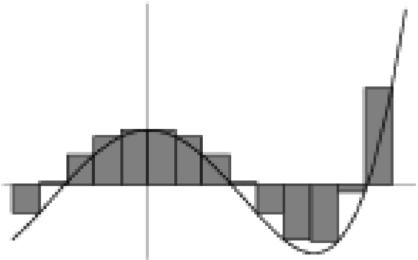
Άνω άθροισμα

Ορισμός άνω αθροίσματος

άνω άθροισμα (upper sum) της φραγμένης συνάρτησης πάνω σε μια διαμέριση P

$$U(P,f) = \sum_{k=1}^{n} M_k \triangle x_k$$

$$M_k = \sup \{f(x),\, x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$$



Προτάσεις (Φραγμένη συνάρτηση)

$f(x)$ φραγμένη συνάρτηση $f\,:\,[a,\,b]\;\to\;\mathbb{R}$

$$m \leq f(x) \leq M \quad \text{ή} \quad |f(x)| < B$$

Πρ. 1

$L(P,f)\;\leq\;U(P,f)$

Πρ. 2

Λεπτότερη διαμέριση $\Rightarrow$ μεγαλύτερο κάτω άθροισμα

$$P^* \supset P \;\rightsquigarrow\; L(P,f)\;\leq\;L(P^*,f)$$

$$L(P^*,f) - L(P,f) \leq 2\,(d(P^*) - d(P))\;B\,|P|$$

Πρ. 3

Λεπτότερη διαμέριση $\Rightarrow$ μικρότερο άνω άθροισμα

$$P^* \supset P \;\rightsquigarrow\; U(P^*,f)\;\leq\;U(P,f)$$

$$U(P,f) - U(P^*,f) \leq 2\,(d(P^*) - d(P))\;B\,|P|$$

Πρ. 4

$L(P_1,f) \leq U(P_2,f)$

Πρόταση 1 (Φραγμένη συνάρτηση)

$f(x)$ φραγμένη συνάρτηση $f\ :\ [a,\ b]\ \rightarrow\ \mathbb{R}$

$$m \leq f(x) \leq M \quad \text{ή} \quad |f(x)| < B$$

Πρ. 1

$L(P,f)\ \leq\ U(P,f)$

Απόδειξη.

Από τον ορισμό

$$L(P,f)\ =\ \sum_{k=1}^{n} m_k \triangle x_k$$

$$m_k\ =\ \inf\ \{f(x),\ x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$$

και

$$U(P,f)\ =\ \sum_{k=1}^{n} M_k \triangle x_k$$

$$M_k\ =\ \sup\ \{f(x),\ x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$$

έχουμε ότι: $m_k \leq M_k$ επομένως $L(P,f)\ \leq\ U(P,f)$ □

Πρ. 2

Λεπτότερη διαμέριση ⇒ μεγαλύτερο κάτω άθροισμα

$$P^* \supset P \rightsquigarrow L(P,f) \leq L(P^*,f)$$

$$L(P^*,f) - L(P,f) \leq 2\,(d(P^*) - d(P))\; B\,|P|$$

Απόδειξη.

Εστω P_1 μια διαμέριση που προκύπτει από την P αν προσθέσουμε ένα νέο σημείο y, δηλ. $P_1 = P\bigcup\{y\}$

$$P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i, \ldots, x_n\} \quad d(P) = n$$

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < \underbrace{x_{i-1} < y < x_i} < \ldots < x_n = b$$

$$P_1 = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{νέο} \\ \text{στοιχ.}}}{y}, x_i, \ldots, x_n\}$$

$$L(P,f) = \sum_{k=1}^{i-1} m_k \triangle x_k + \left(\inf_{x_{i-1}\leq x\leq x_i} f(x)\right)(x_i - x_{i-1}) + \sum_{k=i+1}^{n} m_k \triangle x_k$$

$$\begin{aligned} L(P_1,f) = & \sum_{k=1}^{i-1} m_k \triangle x_k + \\ & + \left(\inf_{x_{i-1}\leq x\leq y} f(x)\right)(y - x_{i-1}) + \left(\inf_{y\leq x\leq x_i} f(x)\right)(x_i - y) + \\ & + \sum_{k=i+1}^{n} m_k \triangle x_k \end{aligned}$$

Επειδή $\inf_{x_{i-1}\leq x\leq x_i} f(x) \leq \inf_{x_{i-1}\leq x\leq y} f(x)$ και $\inf_{x_{i-1}\leq x\leq x_i} f(x) \leq \inf_{y\leq x\leq x_i} f(x)$ επομένως

$$\begin{aligned} & L(P_1,f) - L(P,f) = \\ & = \left(\inf_{x_{i-1}\leq x\leq y} f(x) - \inf_{x_{i-1}\leq x\leq x_i} f(x)\right)(y - x_{i-1}) + \\ & + \left(\inf_{y\leq x\leq x_i} f(x) - \inf_{x_{i-1}\leq x\leq x_i} f(x)\right)(x_i - y) \geq 0 \end{aligned}$$

Επειδή $|f(x)| < B$ τότε

$$\inf_{x_{i-1}\leq x\leq y} f(x) - \inf_{x_{i-1}\leq x\leq x_i} f(x) \leq |\inf_{x_{i-1}\leq x\leq y} f(x)| + |\inf_{x_{i-1}\leq x\leq x_i} f(x)| < 2B$$

όμοια

$$\inf_{y\leq x\leq x_i} f(x) - \inf_{x_{i-1}\leq x\leq x_i} f(x) < 2B$$

οπότε

$$L(P_1,f) - L(P,f) < 2B\,(x_i - x_{i-1}) = 2B|P|$$

οπότε επαναλαμβάνοντας το αποτέλεσμα για διαφορές στοιχείων περισσότερο από 1, έτσι αν P_2 προκύπτει από την διαμέριση P_1 με την προσθήκη ενός νέου στοιχείου, η P_3 προκύπτει από την διαμέριση P_2 με την προσθήκη ενός νέου στοιχείου κ.ο.κ. θα έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} L(P_1,f) - L(P,f) < 2B|P| \\ L(P_2,f) - L(P_1,f) < 2B|P_1| \leq 2B|P| \\ L(P_3,f) - L(P_3,f) < 2B|P_2| \leq 2B|P| \\ \qquad \ldots \\ L(P_m,f) - L(P_{m-1},f) < 2B|P_{m-1}| \leq 2B|P| \end{array}\right\}$$
$$\Rightarrow L(P_m,f) - L(P_1,f) < 2mB|P|$$

αλλά $m = d(P_m) - d(P)$. Οπότε

$$L(P^*,f) - L(P,f) < 2B\,m\,|P| \quad m = d(P^*) - d(P)$$

□

Πρόταση 3 και Πρόταση 4 (Φραγμένη συνάρτηση)

Πρ. 3

Λεπτότερη διαμέριση $\Rightarrow$ μικρότερο άνω άθροισμα

$$P^* \supset P \;\rightsquigarrow\; U(P^*, f) \leq U(P, f)$$

$$U(P, f) - U(P^*, f) \leq 2\left(d(P^*) - d(P)\right) B\,|P|$$

Η απόδειξη είναι ίδια όπως στην πρόταση 2.

Πρ. 4

$L(P_1, f) \leq U(P_2, f)$

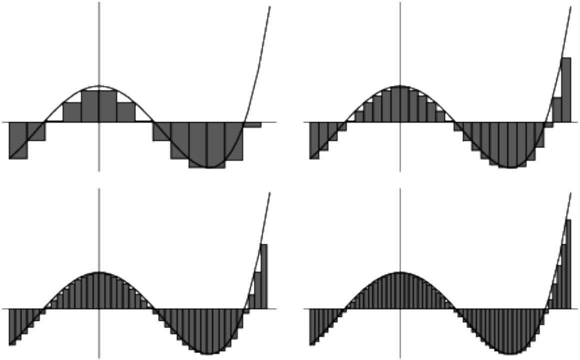
Απόδειξη.

$$\begin{aligned} L(P_1, f) \leq &\quad L(P_1 \bigcup P_2, f) \leq U(P_1 \bigcup P_2, f) \leq \\ \leq &\quad U(P_2, f) \end{aligned}$$

$\square$

Κάτω ολοκλήρωμα

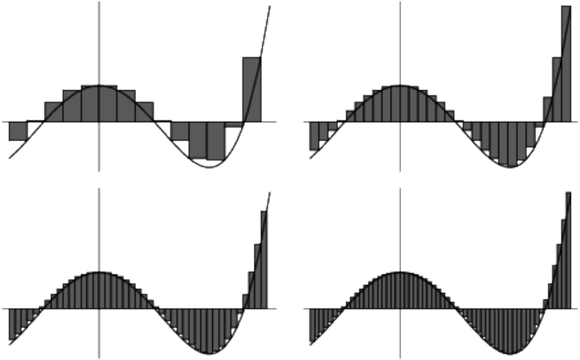
$$L(f) \equiv \sup_{P} L(P, f)$$



Darboux ολοκλήρωμα (2)

Ανω ολοκλήρωμα

$$U(f) \equiv \inf_P U(P, f)$$

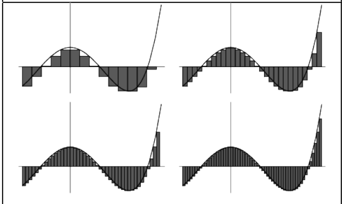
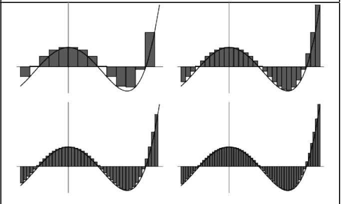


$$L(f) \leq u(f)$$

Ολοκλήρωμα Darboux

$f(x)$ Darboux–ολοκληρώσιμη $\Leftrightarrow L(f) = U(f)$

$$L(f) = U(f) \equiv I_D(f) \equiv \int_a^b f(x)\,dx$$

Κάτω ολοκλήρωμα	Ανω ολοκλήρωμα
	

Πρόταση 5-Λήμμα-Πρόταση 6

Πρ. 5

Αν υπάρχει P_n είναι κάποια ακολουθία διαμερίσεων τέτοια ώστε

$$\lim_{n\to\infty} L(P_n, f) = \lim_{n\to\infty} U(P_n, f)$$

τότε η συνάρτηση $f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη

Λήμμα

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists P : \; U(P, f) - L(P, f) < U(f) - L(f) + \epsilon$$

Πρ.6

$f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη $L(f) = U(f) \Leftrightarrow$
$\forall \epsilon > 0 \quad \exists P : U(P, f) - L(P, f) < \epsilon$

Πρόταση 7 Θεώρημα Darboux

Πρ.7 Θεώρημα Darboux

$f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη $L(f) = U(f) \Leftrightarrow$

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : |P| < \delta \Rightarrow U(P,f) - L(P,f) < \epsilon$$

Απόδειξη Πρότασης 5

Πρ. 5

Αν υπάρχει P_n είναι κάποια ακολουθία διαμερίσεων τέτοια ώστε

$$\lim_{n\to\infty} L(P_n, f) = \lim_{n\to\infty} U(P_n, f)$$

τότε η συνάρτηση $f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη

Απόδειξη.

Εχουμε ότι

$$L(P_n, f) \leq L(f) \leq U(f) \leq U(P_n, f) \Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} L(P_n, f) \leq L(f) \leq U(f) \leq \lim_{n\to\infty} U(P_n, f)$$

$\square$

Απόδειξη Λήμματος

Λήμμα

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists P: \; U(P,f) - L(P,f) < U(f) - L(f) + \epsilon$$

Απόδειξη.

Επειδή

$$L(f) = \sup_P L(P,f) \; \Rightarrow \; \forall \epsilon > 0 \, \exists P_1 : L(P_1,f) > L(f) - \epsilon/2$$

$$U(f) = \inf_P U(P,f) \; \Rightarrow \; \forall \epsilon > 0 \, \exists P_2 : U(P_2,f) < U(f) + \epsilon/2$$

και για $P = P_1 \bigcup P_2$

$L(P,f) \geq L(P_1,f) > L(f) - \epsilon/2 \qquad U(P,f) \leq U(P_2,f) > U(f) + \epsilon/2$

άρα $U(P,f) - L(P,f) < U(f) - L(f) + \epsilon$ $\square$

Απόδειξη Πρότασης 6

Πρ.6

$f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη $L(f) = U(f) \Leftrightarrow$
$\forall \epsilon > 0 \quad \exists P : U(P, f) - L(P, f) < \epsilon$

Απόδειξη.

Αν $L(f) = U(f)$ τότε από το παραπάνω λήμμα έχουμε ότι:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists P : U(P, f) - L(P, f) < \epsilon$$

Εστω τώρα ότι η παραπάνω σχέση αληθεύει τότε έχουμε επίσης ότι:

$$L(P, f) \leq L(f) \leq U(f) \leq U(P, f) \Rightarrow U(f) - L(F) \leq U(P, f) - L(P, f) < \epsilon$$

Αρα $\forall \epsilon > 0 \quad U(f) - L(F) < \epsilon$ οπότε $L(f) = U(f)$. $\square$

Απόδειξη Θεωρήματος Darboux

Πρ.7 Θεώρημα Darboux

$f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη $L(f) = U(f) \Leftrightarrow$

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \ |P| < \delta \Rightarrow U(P,f) - L(P,f) < \epsilon$$

Απόδειξη.

Αν $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \ |P| < \delta \Rightarrow U(P,f) - L(P,f) < \epsilon$ τότε ικανοποιούνται οι συνθήκες της πρότασης 6, επειδή

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists P : \ U(P,f) - L(P,f) < \epsilon \Rightarrow L(f) = U(f)$$

Εστω τώρα $L(f) = U(f)$ τότε σύμφωνα με την πρόταση 6

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists P_0 : U(P_0,f) - L(P_0,f) < \epsilon/2$$

Από την διαμέριση P_0 ορίζουμε

$$\delta = \frac{\epsilon}{8d(P_0)B} \qquad |f(x)| < B$$

Εστω μια διαμέριση P, $\quad |P| < \delta$.
Ορίζουμε $Q = P \bigcup P_0 \rightsquigarrow d(Q) - d(P) \leq d(P_0)$
Από την πρόταση 2

$$L(Q,f) - L(P,f) \leq 2\left(d(Q) - d(P)\right)B|P| \leq 2d(P_0)B|P| < 2d(P_0)B\delta = \frac{\epsilon}{4}$$

από την πρόταση 2 έχουμε

$$L(P_0,f) - L(P,f) \leq L(Q,f) - L(P,f) < \frac{\epsilon}{4}$$

όμοια αποδεικνύουμε ότι: $U(P,f) - U(P_0,f) < \frac{\epsilon}{4}$ επομένως

$$U(P,f) - L(P,f) =$$
$$= \underbrace{U(P,f) - U(P_0,f)}_{<\epsilon/4} + \underbrace{U(P_0,f) - L(P_0,f)}_{<\epsilon/2} + \underbrace{L(P_0,f) - L(P,f)}_{<\epsilon/4} < \epsilon$$

□

Πρόταση 8

Πρ. 8

$f(x)$ μονότονη και φραγμένη στο $[a, b]$ $\rightsquigarrow$ $f(x)$ (Darboux)-ολοκληρώσιμη

Απόδειξη.

Εστω $f(x)$ αύξουσα και $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ μιά διαμέριση και
$\triangle x_k \leq |P|$
Αν $x_{k-1} \leq x \leq x_k$ τότε $m_k = \inf\{f(x), x \in [x_{k-1}, x_k]\} = f(x_{k-1})$ και
$M_k = \sup\{f(x), x \in [x_{k-1}, x_k]\} = f(x_k)$ οπότε

$$U(P,f) - L(P,f) = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k) \triangle x_k \leq$$

$$\leq |P| \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k) = |P| \left(f(b) - f(a)\right)$$

Για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει μια διαμέριση με $|P| < \dfrac{\epsilon}{f(b) - f(a)}$ οπότε
$U(P,f) - L(P,f) < \epsilon$. Από την Πρ. 6 συνεπάγεται ότι υπάρχει το ολοκλήρωμα Darboux. $\square$

Πρόταση 9

Πρ. 9

$f(x)$ συνεχής στο $[a,b]$ $\rightsquigarrow$ $f(x)$ ομοιόμορφα συνεχής στο $[a,b]$
$\rightsquigarrow$ $f(x)$ (Darboux)-ολοκληρώσιμη

Απόδειξη.

$f(x)$ ομοιόμορφα συνεχής $\Leftrightarrow$

$$\forall\,\epsilon > 0,\ \exists\,\delta(\epsilon)\ :\ |x-y| < \delta(\epsilon)\ \rightsquigarrow\ |f(x)-f(y)| < \frac{\epsilon}{b-a}$$

Διαλέγουμε μια διαμέριση με $|P| < \delta(\epsilon)$. Επειδή η συνάρτηση είναι (ομοιόμορφα) συνεχής στο διάστημα $[x_{k-1}, x_k]$ θα έχουμε

$$M_k = \sup\{f(x), x \in [x_{k-1}, x_k]\} = f(\xi_k)$$

$$m_k = \inf\{f(x), x \in [x_{k-1}, x_k]\} = f(\eta_k)$$

με $\xi_k,\ \eta_k\ \in [x_{k-1}, x_k]$ οπότε $M_k - m_k = f(\xi_k) - f(\eta_k) < \dfrac{\epsilon}{b-a}$ και

$$U(P,f) - L(P,f) = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k) \triangle x_k <$$

$$\leq \frac{\epsilon}{b-a} \sum_{k=1}^{n} \triangle x_k = \epsilon$$

Από την Πρ. 6 συνεπάγεται ότι υπάρχει το ολοκλήρωμα Darboux. □

Πρόταση 8 και Πρόταση 9

Πρ. 8

$f(x)$ μονότονη και φραγμένη στο $[a, b] \rightsquigarrow f(x)$ (Darboux)-ολοκληρώσιμη

Πρ. 9

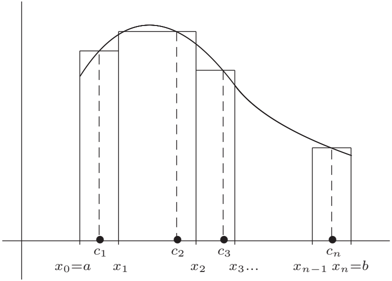
$$f(x) \text{ συνεχής στο } [a, b] \rightsquigarrow f(x) \text{ ομοιόμορφα συνεχής στο } [a, b]$$
$$\rightsquigarrow f(x) \text{ (Darboux)-ολοκληρώσιμη}$$

Ολοκλήρωμα Riemann

$$\textit{διαμέριση } P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n,\}$$
$$\textit{επιλογή σημείων } T = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n,\} \text{ όπου } x_{k-1} \le \xi_k \le x_k$$

άθροισμα Riemann

$$S\left(P, T, f\right) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \triangle x_k$$



Ορισμός Ολοκληρώματος Riemann

Ορισμός: Ολοκλήρωμα Riemann

$\exists$ ολοκλήρωμα Riemann $\Leftrightarrow \exists \lim_{|P|\to 0} S(P, T, f) = I_R(f)$

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta(\epsilon) > O : \ \forall |P| < \delta \ \text{ και } \ T \ \text{ επιλογή σημείων}$$
$$\Rightarrow |S(P, T, f) - I_R(f)| < \epsilon$$

Αν υπάρχει το ολοκλήρωμα Riemann τότε είναι μοναδικό

Πρόταση 10 και Πρόταση 11

Πρ. 10

ολοκλήρωμα Riemann $\quad I_R(f) = I_D(f) \quad$ ολοκλήρωμα Darboux

Πρ. 11 (Θεώρημα Darboux)

$$\boxed{\boxed{\begin{gathered}\xi_{k,n} \in \left[a + \frac{k-1}{n}(b-a),\ a + \frac{k}{n}(b-a)\right] \\[2ex] \int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\xi_{k,n}\right)\end{gathered}}}$$

Παράδειγμα

Παράδειγμα

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} \right) = \int\limits_{0}^{1} \frac{1}{1+x} dx = \ln 2$$

Πρόταση 12 Ιδιότητες ολοκληρωμάτων (1)

'Γραμμικότητα'

$$\int_a^b (c_1 f(x) + c_2 g(x))\, dx = c_1 \int_a^b f(x)\, dx + c_2 \int_a^b g(x)\, dx$$

'Θετικότητα'

$$f_1(x) \le f_2(x) \rightsquigarrow \int_a^b f_1(x)\, dx \le \int_a^b f_2(x)\, dx$$

'Τριγωνική ιδιότητα'

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \le \int_a^b |f(x)|\, dx$$

Πρόταση 12 Ιδιότητες ολοκληρωμάτων (2)

'Χωρισμός διαστήματος'

$$c \in [a,\ b] \ \rightsquigarrow \ \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

'Επεκτάσεις ολοκληρώματος'

$$\int_b^a f(x)\,dx \overset{\text{op}}{\equiv} -\int_a^b f(x)\,dx \qquad \int_a^a f(x)\,dx \overset{\text{op}}{\equiv} 0$$

Ανισότητες

Βασική Ανισότητα

$$m \leq f(x) \leq M \rightsquigarrow \rightsquigarrow m\,(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M\,(b-a)$$

Ανισότητα Cauchy-Schwartz

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)\,dx \right| \leq \sqrt{\left(\int_a^b f^2(x)\,dx \right) \left(\int_a^b g^2(x)\,dx \right)}$$

Ανισότητα Minkowski

$$\sqrt{\int_a^b (f(x)+g(x))^2\,dx} \leq$$

$$\leq \sqrt{\left(\int_a^b f^2(x)\,dx \right)} + \sqrt{\left(\int_a^b g^2(x)\,dx \right)}$$

Λήμμα

Λήμμα

Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι φραγμένη
σε ένα διάστημα $I = [c, d]$

$$
\begin{aligned}
m &= \inf \{f(x),\, x \in I\} \\
M &= \sup \{f(x),\, x \in I\}
\end{aligned}
$$

$$\Downarrow$$

$$\forall\, u \in I \quad \forall\, v \in I \;\rightsquigarrow\; |f(u) - f(v)| \leq M - m$$

και

$$\boxed{\sup\left\{|f(u) - f(v)|\,,\; u \in I,\; v \in I\right\} = M - m}$$

Προτάσεις 13,14,15,16

Πρ. 13

Αν $f(x)$ ολοκληρώσιμη στο $[a,\ b]$

$$\Downarrow$$

Η $|f(x)|$ ολοκληρώσιμη στο $[a,\ b]$

Πρ. 14

Αν $f(x)$ και $g(x)$ ολοκληρώσιμες στο $[a,\ b]$

$$\Downarrow$$

Η $f(x) \cdot g(x)$ ολοκληρώσιμη στο $[a,\ b]$

Πρ. 15

Αν $f(x)$ ολοκληρώσιμη στο $[a,\ b]$ και

$\inf \{|f(x)|\,,\ x \in [a,\ b]\} > 0$

$$\Downarrow$$

Η $\dfrac{1}{f(x)}$ ολοκληρώσιμη στο $[a,\ b]$

Πρ. 16

Αν $f(x)$ ολοκληρώσιμη στο $[a,\ b]$

$g(x)$ συνεχής στο $f\left([a,\ b]\right)$

$$\Downarrow$$

Η $h(x) = g\left(f(x)\right)$ ολοκληρώσιμη στο $[a,\ b]$

Απόδειξη Βασικής Ανισότητας

Βασική Ανισότητα

$$m \leq \; f(x) \; \leq \; M \;\; \rightsquigarrow \rightsquigarrow m\,(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M\,(b-a)$$

Απόδειξη.

Από την Πρ. 12 (¨Θετικότηττα¨) αποδεικνύεται η βασική ανισότητα ολοκληρώνοντας στο διάστημα $[a, b]$ □

Απόδειξη Ανισότητας Cauchy-Schwartz

Ανισότητα Cauchy-Schwartz

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)\,dx \right| \leq \sqrt{\left(\int_a^b f^2(x)\,dx \right) \left(\int_a^b g^2(x)\,dx \right)}$$

Απόδειξη.

Γιά κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

$$0 \leq (\lambda f(x) + g(x))^2 = \lambda^2 f^2(x) + 2\lambda f(x)g(x) + g^2(x) \rightsquigarrow$$
$$0 \leq \lambda^2 \int_a^b f^2(x)\,dx + 2\lambda \int_a^b f(x)g(x)\,dx + \int_a^b g^2(x)\,dx \rightsquigarrow$$
$$\left(\lambda \int_a^b f(x)g(x)\,dx \right) - \left(\int_a^b f^2(x)\,dx \right) \left(\int_a^b g^2(x)\,dx \right) \leq 0$$

$\square$

Απόδειξη Ανισότητας Minkowski

Ανισότητα Minkowski

$$\sqrt{\int_a^b (f(x)+g(x))^2 \, dx} \leq$$

$$\leq \sqrt{\left(\int_a^b f^2(x)\, dx\right)} + \sqrt{\left(\int_a^b g^2(x)\, dx\right)}$$

Απόδειξη.

$$\int_a^b (f(x)+g(x))^2 \, dx =$$

$$= \int_a^b f^2(x)\, dx + 2\int_a^b f(x)g(x)\, dx + \int_a^b g^2(x)\, dx \leq$$

$$\leq \int_a^b f^2(x)\, dx + 2\left|\int_a^b f(x)g(x)\, dx\right| + \int_a^b g^2(x)\, dx \underbrace{\leq}_{\text{Ανισότητα Cauchy-Schwartz}}$$

$$\leq \int_a^b f^2(x)\, dx + 2\sqrt{\left(\int_a^b f^2(x)\, dx\right)\left(\int_a^b g^2(x)\, dx\right)} + \int_a^b g^2(x)\, dx =$$

$$= \left(\sqrt{\left(\int_a^b f^2(x)\, dx\right)} + \sqrt{\left(\int_a^b g^2(x)\, dx\right)}\right)^2$$

□

Απόδειξη Λήμματος

Λήμμα

Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι φραγμένη
σε ένα διάστημα $I = [c, d]$

$$\begin{aligned} m &= \inf\{f(x),\, x \in I\} \\ M &= \sup\{f(x),\, x \in I\} \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$\forall u \in I \quad \forall v \in I \ \rightsquigarrow\ |f(u) - f(v)| \le M - m$$

και

$$\boxed{\sup\{|f(u) - f(v)|\,,\ u \in I,\ v \in I\} = M - m}$$

Απόδειξη.

$$\forall u \ \rightsquigarrow\ f(u) \le M \quad \forall v \ \rightsquigarrow\ -f(v) \le -m \quad \Rightarrow f(u) - f(v) \le M - m \quad \text{και} \quad f(v) - f(u) \le M - m$$

$$\Rightarrow\ |f(u) - f(v)| \le M - m$$

$$M = \sup\{f(x),\, x \in I\} \ \rightsquigarrow\ \forall \epsilon > 0\ \exists u\ :\ M - \frac{\epsilon}{2} < f(u) \le M$$

$$m = \inf\{f(x),\, x \in I\} \ \rightsquigarrow\ \forall \epsilon > 0\ \exists v\ :\ m \le f(v) < m + \frac{\epsilon}{2} \ \rightsquigarrow\ -m - \frac{\epsilon}{2} < -f(v) \le -m$$

$$\forall \epsilon > 0\ \exists u, v \ \rightsquigarrow\ M - m - \epsilon < f(u) - f(v) \le |f(u) - f(v)|$$

Οπότε

$$\sup\{|f(u) - f(v)|\,,\ u \in I,\ v \in I\} = M - m$$

□

Απόδειξη Πρότασης 13

Πρ. 13

Αν $f(x)$ ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$

$$\Downarrow$$

Η $|f(x)|$ ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$

Απόδειξη.

Εστω $P = \{a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = b\}$, $M_k^* = \sup \{|f(x)|, x \in I_k\}$ και $m_k^* = \inf \{|f(x)|, x \in I_k\}$, $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ τότε

$$|(|f(u)| - |f(v)|)| \leq |f(u) - f(v)| \underbrace{\rightsquigarrow}_{\text{Λήμμα}} M_k^* - m_k^* \leq M_k - m_k$$

$$U(P, f) - L(P, f) = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k) \triangle x_k \quad \text{και} \quad U(P, |f|) - L(P, |f|) = \sum_{k=1}^{n} (M_k^* - m_k^*) \triangle x_k$$

$$\Rightarrow U(P, |f|) - L(P, |f|) \leq U(P, f) - L(P, f) \rightsquigarrow$$

Από την Πρ.6 έχουμε

$$f \text{ ολοκληρώσιμη} \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \, \exists P : U(P, f) - L(P, f) < \epsilon$$

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists P : U(P, |f|) - L(P, |f|) \leq U(P, f) - L(P, f) < \epsilon \Rightarrow |f| \text{ ολοκληρώσιμη}$$

$\square$

Απόδειξη Πρότασης 14

Πρ. 14

Αν $f(x)$ και $g(x)$ ολοκληρώσιμες στο $[a,\ b]$
$$\Downarrow$$
Η $f(x)\cdot g(x)$ ολοκληρώσιμη στο $[a,\ b]$

Απόδειξη.

Αν $|f(x)| < B_f$ και $|g(x)| < B_g$ τότε αν $x \in [x_{k-1}, x_k]$ και $y \in [x_{k-1}, x_k]$.
Εστω $P = \{a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = b\}$,

$$|(f(x)g(x) - f(y)g(y))| \leq |f(x)(g(x) - g(y)) + (f(x) - f(y))\, g(y)| \leq B_f\, |g(x) - g(y)| + B_g\, |f(x) - f(y)|$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{\text{Λήμμα}} \ |(f(x)g(x) - f(y)g(y))| \leq B_f\left(M_k^g - m_k^g\right) + B_g\left(M_k^f - m_k^f\right)$$

όπου

$$M_k^f = \sup\{f(x),\ x_{k-1} \leq x \leq x_k\}, \quad M_k^g = \sup\{g(x),\ x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$$

$$m_k^f = \inf\{f(x),\ x_{k-1} \leq x \leq x_k\}, \quad m_k^g = \inf\{g(x),\ x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$$

άρα

$$M_k^{fg} - m_k^{fg} = \sup\{|(f(x)g(x) - f(y)g(y))|\,,\ x,\ y \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

$$f \text{ ολοκληρώσιμη} \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0\ \exists P_1\ :\ U(P_1, f) - L(P_1, f) < \frac{\epsilon}{B_g}$$

$$g \text{ ολοκληρώσιμη} \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0\ \exists P_2\ :\ U(P_2, f) - L(P_2, f) < \frac{\epsilon}{B_f}$$

$$\Rightarrow \forall \epsilon > 0\ \exists P = P_1 \bigcup P_2\ :\quad U(P, f) - L(P, f) \underbrace{\leq}_{\text{Πρ.2 και 3}} U(P_1, f) - L(P_1, f) < \tfrac{\epsilon}{B_g}$$

$$U(P, g) - L(P, g) \underbrace{\leq}_{\text{Πρ.2 και 3}} U(P_2, g) - L(P_2, g) < \tfrac{\epsilon}{B_f}$$

$$\Rightarrow \forall \epsilon > 0\ \exists P\ :\ U(P, fg) - L(P, fg) < \epsilon \Leftrightarrow fg \text{ ολοκληρώσιμη}$$

□

Απόδειξη Πρότασης 15

Πρ. 15

$$\text{Αν } f(x) \text{ ολοκληρώσιμη στο } [a,\, b] \text{ και}$$
$$\inf\{|f(x)|\,,\, x \in [a,\, b]\} > 0$$
$$\Downarrow$$
$$\text{Η } \frac{1}{f(x)} \text{ ολοκληρώσιμη στο } [a,\, b]$$

Απόδειξη.

$$0 < \gamma = \inf\{|f(u)|\,,\, u \in [a,\, b]\} \rightsquigarrow 0 < \frac{1}{f(x)} \leq \frac{1}{\gamma}$$

$$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(y)}\right| = \frac{1}{f(x)f(y)}\,|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{\gamma^2}\,|f(x) - f(y)|$$

$$\rightsquigarrow M_k^{1/f} - m_k^{1/f} \leq \frac{1}{\gamma^2}\left(M_k^f - m_k^f\right)$$

κλπ κλπ όπως στις προηγούμενες προτάσεις □

Πρ. 16

Αν $f(x)$ ολοκληρώσιμη και
$g(x)$ συνεχής στο $[a, b]$
$\Downarrow$
Η $h(x) = g(f(x))$ ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$

(Απόδειξη δυσκολώτερη αλλά στο πνεύμα των προηγουμένων, δεν έγινε στην τάξη)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

(1) Αποδείξτε f ολοκληρώσιμη $\rightsquigarrow$ f^2 ολοκληρώσιμη
(2) Αποδείξτε $f > \gamma > 0$ ολοκληρώσιμη $\rightsquigarrow$ $\sqrt{f}$ ολοκληρώσιμη
(3) Αποδείξτε $f > \gamma > 0$ ολοκληρώσιμη $\rightsquigarrow$ $\sqrt[3]{f}$ ολοκληρώσιμη

Πρόταση 17 (a-b)

Πρ. 17a

Αν $f(x)$ ολοκληρώσιμη στο $[a,\, b]$
και $F(x)$ συνεχής **και** $F'(x) = f(x)$ στο $(a,\, b)$

$$\Downarrow$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; F(b) \;-\; F(a)$$

Πρ. 17b Θεώρημα Cauchy

Αν $f(x)$ ολοκληρώσιμη στο $[a,\, b]$

και $F(x) \;=\; \int_a^x f(t)\,dt \qquad \forall\, x \in [a,\, b]$

$$\Downarrow$$

$F(x)$ συνεχής στο $[a,\, b]$

Πρόταση 17 (c-d)

Πρ. 17c

Αν $f(x)$ ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$
και $f(x)$ συνεχής από αριστερά ή από δεξιά στο $x_0 \in [a, b]$

$$\textbf{και } F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad \forall x \in [a, b]$$

$$\Downarrow$$

$$F'_{-}(x_0) = \lim_{\epsilon \to 0} f(x_0 + \epsilon) \quad \epsilon > 0$$

$$\text{ή } F'_{+}(x_0) = \lim_{\epsilon \to 0} f(x_0 - \epsilon) \text{ στο } [a, b]$$

Πρ. 17d Θεμελιώδες Θεώρημα Απειροστικού Λογισμού

Αν $f(x)$ συνεχής στο $[a, b]$ τότε

$$G(x) - G(a) = \int_a^x f(t)\,dt$$

$$\Updownarrow$$

$$G'(x) = f(x) \qquad \forall x \in [a, b]$$

Πρόταση 18-Πρόταση 19-Πόρισμα

Πρ. 18

Αν $f'(x)$ και $g'(x)$ ολοκληρώσιμες στο $[a, b]$

$$\Downarrow$$

$$\int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx + \int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx = f(x)\,g(x)\Big]_a^b$$

Πρ. 19

Αν $f(x)$ συνεχής και $g(x)$ διαφορίσιμη στο $[a, b]$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^{g(x)} f(t)\,dt\right) = f\left(g(x)\right)\,g'(x)$$

Πόρισμα

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt\right) = f\left(g(x)\right)\,g'(x) - f\left(h(x)\right)\,h'(x)$$

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ (1)

Πρ. 20a

Αν $f(x)$ φραγμένη στο $[a,\, b]$ $m \leq f(x) \leq M$
και $g(x)$ ολοκληρώσιμη με σταθερό πρόσημο
και $f(x)g(x)$ ολοκληρώσιμη

$$\Downarrow$$

$$\exists\, \mu \in [m,\, M] \;\rightsquigarrow\; \int_a^b f(x)g(x)\,dx \;=\; \mu \int_a^b g(x)\,dx$$

Πρ. 20b: Πρώτο Θεωρημα Μέσης Τιμής

Αν $f(x)$ συνεχής στο $[a,\, b]$
και $g(x)$ ολοκληρώσιμη
με σταθερό πρόσημο

$\rightsquigarrow$ $f(x)g(x)$ ολοκληρώσιμη

$$\Downarrow$$

$$\exists\, \xi \in [a,\, b] \;\rightsquigarrow\; \int_a^b f(x)g(x)\,dx \;=\; f(\xi) \int_a^b g(x)\,dx$$

Πόρισμα

Αν $f(x)$ συνεχής στο $[a,\, b]$ $\exists\, \xi \in [a,\, b] \;\rightsquigarrow\; \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \;=\; f(\xi)\,(b-a)$

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ (2)

Πρ. 20c

Αν $f(x)$ μονότονη **και** $g(x)$ ολοκληρώσιμη με σταθερό πρόσημο

$$\Downarrow$$

$$\exists \xi \in [a,\ b] \ \rightsquigarrow \ \int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(a)\int_a^\xi g(x)\,dx + f(b)\int_\xi^b g(x)\,dx$$

Πρ. 20c′: Δεύτερο Θεωρημα Μέσης Τιμής

Αν $f(x)$ μονότονη συνεχής**και** $\exists\ f'(x)$
και $g(x)$ συνεχής

$$\Downarrow$$

$$\exists \xi \in [a,\ b] \ \rightsquigarrow \ \int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(a)\int_a^\xi g(x)\,dx + f(b)\int_\xi^b g(x)\,dx$$

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ (3)

Πρ. 20a

Αν $f(x)$ φραγμένη στο $[a, b]$ $m \leq f(x) \leq M$
και $g(x)$ ολοκληρώσιμη με σταθερό πρόσημο
και $f(x)g(x)$ ολοκληρώσιμη

$$\Downarrow$$

$$\exists\, \mu \in [m, M] \rightsquigarrow \int_a^b f(x)g(x)\,dx = \mu \int_a^b g(x)\,dx$$

Απόδειξη.

Εστω $g(x) \geq 0$ $m \leq f(x) \leq M \rightsquigarrow mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$

(Σημ: αν $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx = 0 \rightsquigarrow \int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0$)

Εστω $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx \neq 0$ τότε

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} = \mu \leq M$$

(Αν $g(x) \leq 0 \rightsquigarrow -g(x) \geq 0$ και εργαζόμαστε όπως προηγούμενα) $\square$

Πρ. 20b: Πρώτο Θεωρημα Μέσης Τιμής

Αν $f(x)$ συνεχής στο $[a, b]$
και $g(x)$ ολοκληρώσιμη
με σταθερό πρόσημο

$\rightsquigarrow$ $f(x)g(x)$ ολοκληρώσιμη

$$\Downarrow$$

$$\exists \xi \in [a, b] \rightsquigarrow \int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi) \int_a^b g(x)\,dx$$

Απόδειξη.

Αφού η $f(x)$ είναι συνεχής, αν

$$m = \inf\ f(x), \qquad M = \sup\ f(x), \quad \text{για} x \in [a, b]$$

τότε $\exists \xi\ : f(\xi) = \mu$ όπου μ ορίστηκε στην προηγούμενη πρόταση. □

Πόρισμα

Αν $f(x)$ συνεχής στο $[a,\ b]$ $\exists \xi \in [a,\ b] \rightsquigarrow \int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)\,(b-a)$

Απόδειξη.

θέτουμε $g(x) = 1$ στην προηγούμενη πρόταση. $\square$

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ (6)

Πρ. 20c

Αν $f(x)$ μονότονη **και** $g(x)$ ολοκληρώσιμη με σταθερό πρόσημο

$$\Downarrow$$

$$\exists \xi \in [a, b] \leadsto \int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(a)\int_a^{\xi} g(x)\,dx + f(b)\int_{\xi}^b g(x)\,dx$$

Απόδειξη.

Υποθέτουμε $f(x)$ αύξουσα και $g(x)$ ολοκληρώσιμη με σταθερό θετικό πρόσημο

$$F(z) = \int_a^b f(x)g(x)\,dx - f(a)\int_a^z g(x)\,dx - f(b)\int_z^b g(x)\,dx$$

$$F(a) = \int_a^b f(x)g(x)\,dx - f(b)\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b (f(x) - f(b))g(x)\,dx \leq 0$$

$$F(b) = \int_a^b f(x)g(x)\,dx - f(a)\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b (f(x) - f(a))g(x)\,dx \geq 0$$

επειδή $F(z)$ συνεχής $F(a)F(b) \leq 0 \leadsto \exists \xi : F(\xi) = 0$. □

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ (7)

Πρ. 20c′: Δεύτερο Θεωρημα Μέσης Τιμής

Αν $f(x)$ μονότονη συνεχής**και** $\exists\, f'(x)$
και $g(x)$ συνεχής

$$\Downarrow$$

$$\exists \xi \in [a,\, b] \rightsquigarrow \int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(a)\int_a^{\xi} g(x)\,dx + f(b)\int_{\xi}^{b} g(x)\,dx$$

Απόδειξη.

Θεωρούμε $f'(x) \le 0$.

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,d\left(\int_a^x g(t)dt\right) =$$
$$= f(b)\left(\int_a^b g(t)dt\right) - \int_a^b f'(x)\left(\int_a^x g(t)dt\right)dx$$
$$\left(\int_a^x g(t)dt\right) \quad \text{συνεχής}$$
$$f'(x) \quad \text{ολοκληρώσιμη και διατηρεί πρόσιμο}$$
$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(b)\left(\int_a^b g(t)dt\right) - \left(\int_a^{\xi} g(t)dt\right)\left(\int_a^b f'(x)dx\right) =$$
$$= f(b)\left(\int_a^b g(t)dt\right) - \left(\int_a^{\xi} g(t)dt\right)(f(b)-f(a)) =$$
$$= f(b)\left(\int_a^b g(t)dt - \int_a^{\xi} g(t)dt\right) + f(a)\int_a^{\xi} g(t)dt =$$
$$= f(a)\int_a^{\xi} g(t)dt + f(b)\int_{\xi}^{b} g(t)dt$$

□

ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Ορισμός

$f(x)$ ¨τοπικά’ ολοκληρώσιμη στο $(a,\ b)$ αν για κάθε κλειστό $[c,\ d] \subset (a,\ b)$ η $f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη.

πχ $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$ είναι <u>τοπικά</u> ολοκληρώσιμη στο $\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$ είναι <u>τοπικά</u> ολοκληρώσιμη στο $(0, 1)$

Ορισμός

Το γενικευμένο ολοκλήρωμα για μια τοπικά ολκληρώσιμη συνάρτηση $f(x)$ υπάρχει αν μπορούμε να βρούμε τα όρια για κάθε $u \in (a, , b)$

$$\int_a^b f(x)\,dx \overset{\text{op}}{\equiv} \lim_{c\to a} \int_c^u f(x)\,dx + \lim_{d\to b} \int_u^d f(x)\,dx$$

ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ Α′ ΕΙΔΟΥΣ $a = -\infty$ ή (και) $b = \infty$

$f(x) = \mathrm{e}^{-x}$ είναι "τοπικά" ολοκληρώσιμη στο $[0, \infty)$

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\, dx = \lim_{d \to \infty} \int_0^d \mathrm{e}^{-x}\, dx = \lim_{d \to \infty} \left(1 - \mathrm{e}^{-d}\right) = 1$$

ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ Β′ ΕΙΔΟΥΣ στο ένα ή και στα δύο όρια της ολοκλήρωσης η συνάρτηση δεν ορίζεται.

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$ είναι "τοπικά" ολοκληρώσιμη στο $(0, 1)$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2}} \overbrace{=}^{x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sin t} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\frac{1}{2}\cos t}{\frac{1}{2}\cos t} dt = \pi$$

ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΥΠΑΡΞΗΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ Α΄ ΕΙΔΟΥΣ

Θεωρούμε ολοκληρώματα του είδους: $f(x)$ τοπικά ολοκληρώριμη,

$$F(u) = \int_a^u f(x)\,dx \text{ και } \lim_{u\to\infty} F(u) \equiv \int_a^\infty f(x)\,dx$$

ΚΡΙΤΗΡΙΟ Cauchy

Υπάρχει το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\Leftrightarrow$ η συνάρτηση $F(u)$ ικανοποιεί μια συνθήκη Cauchy για $u \to \infty$

$$\forall\,\epsilon\,\exists\,R > 0\ :\ x_2 > x_1 > R\ \Rightarrow\ |F(x_2) - F(x_1)| = \left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx\right| < \epsilon$$

Παράδειγμα: Το ολοκλήρωμα $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ υπάρχει.

Παράδειγμα 1 (Ύπαρξη Ολοκληρώματος)

Παράδειγμα

Το ολοκλήρωμα $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$ υπάρχει.

Απόδειξη.

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\sin x}{x}\, dx = -\int_{x_1}^{x_2} \frac{d \cos x}{x} = \frac{\cos x_1}{x_1} - \frac{\cos x_2}{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \frac{\cos x}{x^2}\, dx$$

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sin x}{x}\, dx \right| \leq \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \frac{|\cos x|}{x^2}\, dx \leq \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{x^2}\, dx \leq \frac{2}{x_1}$$

$$\forall \epsilon \, \exists R = \frac{2}{\epsilon} \, : \, x_2 > x_1 > R \Rightarrow \left| \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sin x}{x}\, dx \right| \leq \frac{2}{x_1} < \epsilon$$

$\square$

Απόλυτη και Απλή σύγκλιση

Απόλυτη σύγκλιση ⇒ Απλή σύγκλιση

$$\exists \int_a^\infty |f(x)|\, dx \Rightarrow \exists \int_a^\infty f(x)\, dx$$

ΠΡΟΣΟΧΗ Μπορεί να υπάρχει σύγκλιση αλλά όχι απόλυτη σύγκλιση

πχ. το $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx$ υπάρχει αλλά **δεν** υπάρχει το $\displaystyle\int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x}\, dx$

$$\int_a^\infty \frac{|\sin x|}{x}\, dx \geq \int_a^\infty \frac{\sin^2 x}{x}\, dx$$

$$\int_a^\infty \frac{\sin^2 x}{x}\, dx = \frac{1}{2}\int_a^\infty \frac{1-\cos 2x}{x}\, dx = \underbrace{\frac{1}{2}\int_a^\infty \frac{dx}{x}}_{\nexists} - \underbrace{\frac{1}{2}\int_a^\infty \frac{\cos 2x}{x}\, dx}_{\exists}$$

Συνάρτηση Ολοκληρώσιμη στο Άπειρο

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΝΟΝΤΑΙ ΣΤΟ ∞

Θα λέμε ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο ∞ αν

$$\exists \int_a^\infty |f(x)| dx \quad \text{για κάποιο } a > 0$$

$|f(x)| < Cx^p \mathrm{e}^{-x}$ για μεγάλα $x \Rightarrow$ Η $f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη

πχ η $x^2 \sin x \mathrm{e}^{-x}$ είναι ολοκληρώσιμη στο ∞

$|f(x)| < \frac{C}{x^q}, \quad q > 1$ για μεγάλα $x \Rightarrow$ Η $f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη

πχ η $\frac{\sin x^5}{x^{3/2}}$ είναι ολοκληρώσιμη στο ∞

Απόδειξη σύγκλισης (1)

Απόλυτη σύγκλιση ⇒ Απλή σύγκλιση

$$\exists \int_a^\infty |f(x)|\, dx \Rightarrow \exists \int_a^\infty f(x)\, dx$$

Απόδειξη.

$$\exists \int_a^\infty |f(x)|\, dx$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall \epsilon\, \exists R > 0 \,:\, x_2 > x_1 > R \Rightarrow \left| \int_{x_1}^{x_2} |f(x)|\, dx \right| < \epsilon$$

$$\Downarrow$$

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx \right| \leq \int_{x_1}^{x_2} |f(x)|\, dx$$

$$\Downarrow$$

$$\forall \epsilon\, \exists R > 0 \,:\, x_2 > x_1 > R \Rightarrow \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx \right| < \epsilon \Downarrow$$

$$\exists \int_a^\infty f(x)\, dx$$

□

Απόδειξη σύγκλισης (2)

ΠΡΟΣΟΧΗ Μπορεί να υπάρχει σύγκλιση αλλά όχι απόλυτη σύγκλιση

πχ. το $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ υπάρχει αλλά **δεν** υπάρχει το $\displaystyle\int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x}\,dx$

$$\int_a^\infty \frac{|\sin x|}{x}\,dx \geq \int_a^\infty \frac{\sin^2 x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int_a^\infty \frac{1-\cos 2x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\underbrace{\int_a^\infty \frac{dx}{x}}_{\nexists} - \frac{1}{2}\underbrace{\int_a^\infty \frac{\cos 2x}{x}\,d}_{\exists}$$

Απόδειξη Κριτήριο Σύγκρισης

Κριτήριο σύγκρισης

$$0 \le f(x) \le g(x) \quad \text{για} \quad x > a$$

$$\exists \int_a^\infty g(x)\,dx \Rightarrow \exists \int_a^\infty f(x)\,dx$$

$$\nexists \int_a^\infty f(x)\,dx \Rightarrow \nexists \int_a^\infty g(x)\,dx$$

Απόδειξη.

Η απόδειξη στηρίζεται στην σύγκλιση Cauchy και στο γεγονός ότι

$$0 \le \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx \le \int_{x_1}^{x_2} g(x)\,dx$$

πχ το ολοκλήρωμα $\int_0^\infty \frac{1}{(1+x^3)^{1/3}}dx$ δεν υπάρχει γιατί $\frac{1}{x+1} \le \frac{1}{(1+x^3)^{1/3}}$ και το $\int_0^\infty \frac{1}{x+1}dx$ δεν υπάρχει. □

Απόδειξη

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΝΟΝΤΑΙ ΣΤΟ ∞

Θα λέμε ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο ∞ αν

$$\exists \int_a^\infty |f(x)|dx \quad \text{για κάποιο } a > 0$$

$|f(x)| < Cx^p \mathrm{e}^{-x}$ για μεγάλα x

Απόδειξη.

Αν $p \leq 0$ τότε για $x > a > 1 \rightsquigarrow$

$$x^p \mathrm{e}^{-x} < \underbrace{a^p \mathrm{e}^{-x}}_{\text{ολοκληρώσιμη στο } [a,\infty)}$$

οπότε $\exists \int_a^\infty |f(x)|dx \leq Ca^p \int_a^\infty \mathrm{e}^{-x}dx$ Αν $p > 0$ τότε η συνάρτηση $g(x) = x^p \mathrm{e}^{-x/2}$ έχει μέγιστο για $x = 2p$ οπότε

$$|f(x)| < \underbrace{(2p)^p \mathrm{e}^{-p} \mathrm{e}^{-x/2}}_{\text{ολοκληρώσιμη στο } [a,\infty)}$$

□

Παραδείγματα συναρτήσεων ολοκληρώσιμων στο άπειρο

πχ η $x^2 \sin x \mathrm{e}^{-x}$ είναι ολοκληρώσιμη στο ∞

$|f(x)| < \frac{C}{x^q}, \quad q > 1$ για μεγάλα x

Απόδειξη.

Η συνάρτηση $\frac{C}{x^q}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[1, \infty)$

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^q} = \frac{1}{q-1}$$

□

πχ η $\frac{\sin x^5}{x^{3/2}}$ είναι ολοκληρώσιμη στο ∞

Οριακό κριτήριο σύγκλισης

$$0 \leq f(x) \quad \text{και} \quad 0 < g(x) \quad \text{για} \quad x > a$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \geq 0$$

1. $0 < \ell < \infty \ \rightsquigarrow \ \exists \displaystyle\int_a^\infty g(x)\,dx \Leftrightarrow \exists \int_a^\infty f(x)\,dx$
2. $\ell = 0 \ \rightsquigarrow \ \exists \displaystyle\int_a^\infty g(x)\,dx \Rightarrow \exists \int_a^\infty f(x)\,dx$
3. $\ell = \infty \ \rightsquigarrow \ \displaystyle\int_a^\infty g(x)\,dx = \infty \Rightarrow \int_a^\infty f(x)\,dx = \infty$

Απόδειξη Οριακού κριτηρίου σύγκλισης

πχ Αν $0 < \alpha < 2\beta - 1$ τότε $\exists \int_1^\infty \frac{x^\alpha}{(1+x^2)^\beta}\,dx$

Απόδειξη.

1. Για μεγάλα $x > R$ έχουμε $\frac{\ell}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{3\ell}{2}$ επομένως

$$\frac{\ell}{2}g(x) < f(x) \;\rightsquigarrow\; \exists \int_R^\infty f(x)\,dx \Rightarrow \exists \int_R^\infty g(x)\,dx$$

$$f(x) < \frac{3\ell}{2}g(x) \;\rightsquigarrow\; \exists \int_R^\infty g(x)\,dx \Rightarrow \exists \int_R^\infty f(x)\,dx$$

2. Για μεγάλα $x > R$ έχουμε $\frac{f(x)}{g(x)} < \frac{1}{2}$ επομένως

$$f(x) < \frac{1}{2}g(x) \;\rightsquigarrow\; \exists \int_R^\infty g(x)\,dx \Rightarrow \exists \int_R^\infty f(x)\,dx$$

3. Για μεγάλα $x > R$ έχουμε $1 < \frac{f(x)}{g(x)}$ επομένως

$$g(x) < f(x) \;\rightsquigarrow\; \int_R^\infty g(x)\,dx = \infty; \Rightarrow \int_R^\infty f(x)\,dx = \infty$$

□

Ολοκληρωτικό κριτήριο Cauchy

Αν $f(x) > 0$ συνεχής και φθίνουσα στο $[m, \infty)$ τότε

$$\exists \int_m^\infty f(x)\,dx \Leftrightarrow \sum_{k\geq m}^{\infty} f(k) < \infty$$

πχ. Η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$ συγκλίνει για $s > 1$ γιατί το ολοκλήρωμα $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^s} dx$ υπάρχει.

Απόδειξη Ολοκληρωτικού κριτηρίου Cauchy

Ολοκληρωτικό κριτήριο Cauchy

Αν $f(x) > 0$ συνεχής και φθίνουσα στο $[m, \infty)$ τότε

$$\exists \int_m^\infty f(x)\,dx \Leftrightarrow \sum_{k \geq m}^{\infty} f(k) < \infty$$

Απόδειξη.

$f(x) > 0$ συνεχής και φθίνουσα $\rightsquigarrow$

$$k < x < k+1 \Rightarrow f(\underbrace{k+1}_{=\ell}) \leq f(x) \leq f(k)$$

$$\Rightarrow \sum_{\ell=q+1}^{\ell=p+1} f(\ell) \leq \int_q^p f(x)\,dx \leq \sum_{k=q}^{k=p} f(k)$$

Οπότε αν $S_n = \sum_{k=m}^{k=n} f(k)$ Cauchy τότε $F(x) = \int_m^x f(t)\,dt$ Cauchy και αντίστροφα. $\square$

ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ Β′ ΕΙΔΟΥΣ

Ορισμός

$f(x)$ ¨τοπικά' ολοκληρώσιμη στο $(a,\ b)$ αν για κάθε κλειστό $[c,\ d] \subset (a,\ b)$ η $f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη.

πχ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$ είναι ¨τοπικά' ολοκληρώσιμη στο $(0, 1)$

Ορισμός

Το γενικευμένο ολοκλήρωμα για μια τοπικά ολκληρώσιμη συνάρτηση $f(x)$ υπάρχει αν μπορούμε να βρούμε τα όρια για κάθε $u \in (a,\ b)$

$$\int_a^b f(x)\,dx \overset{\text{ορ}}{\equiv} \lim_{c\to a} \int_c^u f(x)\,dx + \lim_{d\to b} \int_u^d f(x)\,dx$$

ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ Β′ ΕΙΔΟΥΣ στο ένα όριο της ολοκλήρωσης Εστω ότι η συνάρτηση $f(x)$ συνάρτηση δεν ορίζεται στο b αλλά είναι τοπικά ολοκληρώσιμη στο $[a,\ b)$

$$F(u) = \int_a^u f(x)dx \text{ και } \int_a^u f(x)dx = \lim_{u\to b} F(u)$$

ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΥΠΑΡΞΗΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ Β′ ΕΙΔΟΥΣ

ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ Β′ ΕΙΔΟΥΣ στο ένα όριο της ολοκλήρωσης Εστω ότι η συνάρτηση $f(x)$ συνάρτηση δεν ορίζεται στο b αλλά είναι τοπικά ολοκληρώσιμη στο $[a, b)$

$$F(u) = \int_a^u f(x)dx \text{ και } \int_a^u f(x)dx = \lim_{u \to b} F(u)$$

ΚΡΙΤΗΡΙΟ Cauchy

Υπάρχει το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\Leftrightarrow$ η συνάρτηση $F(u)$ ικανοποιεί μια συνθήκη Cauchy για $u \in [a\, b]$

$$\forall \epsilon\ \exists \delta(\epsilon) > 0 \ : \ |x_2 - x_1| < \delta(\epsilon) \ \Rightarrow \ |F(x_2) - F(x_1)| = \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx \right| < \epsilon$$

Απόλυτη σύγκλιση $\Rightarrow$ **σύγκλιση**

$$\exists \int_a^b |f(x)|\, dx \ \Rightarrow \ \exists \int_a^b f(x)\, dx$$

ΠΡΟΣΟΧΗ Μπορεί να υπάρχει σύγκλιση αλλά όχι απόλυτη σύγκλιση.

Κριτήριο σύγκρισης

Κριτήριο σύγκρισης

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \text{για} \quad x > a$$

$$\exists \int_a^b g(x)\,dx \Rightarrow \exists \int_a^b f(x)\,dx \qquad \nexists \int_a^b f(x)\,dx \Rightarrow \nexists \int_a^b g(x)\,dx$$

$|f(x)| < \frac{C}{(x-a)^p}$ και $0 \leq p < 1$ για $b \geq x \geq a \Rightarrow f(x)$ ολοκληρώσιμη

Οριακό κριτήριο σύγκλισης

$$0 \leq f(x) \quad \text{και} \quad 0 < g(x) \quad \text{για} \quad x > a$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \geq 0$$

1. $0 < \ell < \infty \rightsquigarrow \exists \int_a^b g(x)\,dx \Leftrightarrow \exists \int_a^b f(x)\,dx$
2. $\ell = 0 \rightsquigarrow \exists \int_a^b g(x)\,dx \Rightarrow \exists \int_a^b f(x)\,dx$

Απόδειξη Απόλυτη σύγκλιση-Σύγκλιση

Απόλυτη σύγκλιση $\Rightarrow$ **σύγκλιση**

$$\exists \int_a^b |f(x)|\, dx \;\Rightarrow\; \exists \int_a^b f(x)\, dx$$

Αποδ.:

$$\exists \int_a^b |f(x)|\, dx$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall \epsilon\, \exists \delta > 0 \,:\, |x_2 - b| < \delta \quad \text{και} \quad |x_1 - b| < \delta ; \Rightarrow \left| \int_{x_1}^{x_2} |f(x)|\, dx \right| < \epsilon$$

$$\Downarrow$$

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx \right| \leq \int_{x_1}^{x_2} |f(x)|\, dx$$

$$\Downarrow$$

$$\forall \epsilon\, \exists \delta > 0 \,:\, |x_2 - b| < \delta \quad \text{και} \quad |x_1 - b| < \delta ; \Rightarrow \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx \right| < \epsilon$$

$$\Downarrow$$

$$\exists \int_a^b f(x)\, dx$$

Απόδειξη Κριτήριο σύγκρισης

Κριτήριο σύγκρισης

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \text{για} \quad x > a$$

$$\exists \int_a^b g(x)\,dx \Rightarrow \exists \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\nexists \int_a^b f(x)\,dx \Rightarrow \nexists \int_a^b g(x)\,dx$$

Αποδ.: Η απόδειξη στηρίζεται στην σύγκλιση Cauchy και στο γεγονός ότι

$$0 \leq \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx \leq \int_{x_1}^{x_2} g(x)\,dx$$

Παράδειγμα (Κριτήριο Σύγκρισης)

πχ το ολοκλήρωμα $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sin x}$ δεν υπάρχει γιατί $\sin x < x$ για $0 < x < 1$ και $\frac{1}{x} < \frac{1}{\sin x}$ και το $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{x}$ δεν υπάρχει.

$\rightsquigarrow$ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΝΟΝΤΑΙ ΣΤΟ a

Θα λέμε ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη για $x > a > 0$ αν

$$\exists \int_a^b |f(x)| dx \quad \text{για κάποιο } b > a$$

$$|f(x)| < \frac{C}{(x-a)^p} \text{ και } 0 \leq p < 1 \text{ για } b \geq x \geq a \Rightarrow f(x) \text{ ολοκληρώσιμη}$$

Αποδ.: Αν $1 > p \geq 0$ τότε για $u > a \rightsquigarrow$

$$F(u) = \int_u^b \frac{dx}{(x-a)^p} = \left. \frac{(x-a)^{1-p}}{1-p} \right|_u^b = \frac{(b-a)^{1-p} - (u-a)^{1-p}}{1-p} \xrightarrow[u \to a]{} \frac{(b-a)}{1-}$$

γιατί $1 - p > 0$ οπότε η $\frac{C}{(x-a)^p}$ είναι ολοκληρώσιμη στο a οπότε

$\exists \int_a^b |f(x)|dx \leq C\frac{(b-a)^{1-p}}{1-p}$ πχ η $\frac{1}{\sqrt{\sin x}}$ είναι ολοκληρώσιμη στο 0.

Οριακό κριτήριο σύγκλισης

$$0 \leq f(x) \quad \text{και} \quad 0 < g(x) \quad \text{για} \quad x > a$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \geq 0$$

1. $0 < \ell < \infty \ \rightsquigarrow \ \exists \displaystyle\int_a^b g(x)\,dx \Leftrightarrow \exists \int_a^b f(x)\,dx$
2. $\ell = 0 \ \rightsquigarrow \ \exists \displaystyle\int_a^b g(x)\,dx \Rightarrow \exists \int_a^b f(x)\,dx$

ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΣΥΓΚΛΙΣΗ

Εστω $\{f_n(x),\ n \in \mathbb{N}\}$ μια ακολουθία συναρτήσεων ορισμένων στο διάστημα $I = [a,\ b]$ (ή $(a,\ b]$ ή $[a,\ b)$ ή $(a,\ b)$)

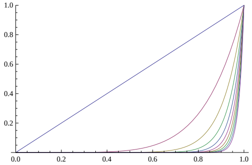
ΟΡΙΣΜΟΣ

Η ακολουθία συναστήσεων συγκλίνει σημειακά (point-wise convergence) στην συνάρτηση $f(x)$ αν

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall \epsilon \ \ \exists N(\epsilon,\ x) \ :\ n > N(\epsilon,\ x) \ \rightsquigarrow\ |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

Παράδειγμα 1

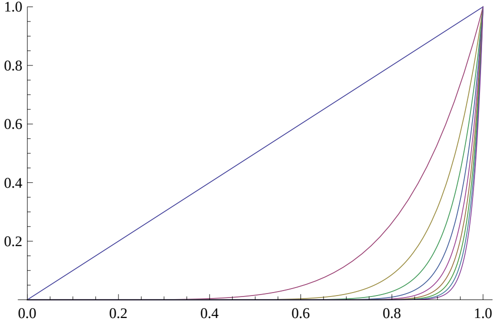
$f_n(x) = x^n,\ |x| < 1$ τότε $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0 = f(x)$



Παράδειγμα 1 (Σύγκλισης) (1)

Παράδειγμα 1

$f_n(x) = x^n$, $|x| < 1$ τότε $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0 = f(x)$

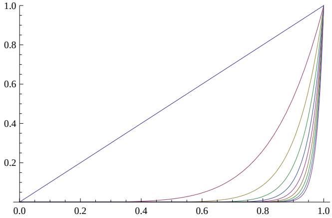


Παρατηρούμε ότι:

$$|x|^n < \epsilon \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{\epsilon} < \frac{1}{|x|^n} \;\Leftrightarrow\; \ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right) < n \ln\left(\frac{1}{|x|}\right) \;\Leftrightarrow\; N(\epsilon, x) = \frac{\ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right)}{\ln\left(\frac{1}{|x|}\right)} < n$$

Παράδειγμα 1

$f_n(x) = x^n$, $|x| < 1$ τότε $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 = f(x)$



Οπότε

$$\forall \epsilon \ \ \exists N(\epsilon, x) = \frac{\ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right)}{\ln\left(\frac{1}{|x|}\right)} \ : \ n > N(\epsilon, x) \ \rightsquigarrow \ |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

Σημείωση: $\sup_{x\in I} N(\epsilon, x) = \infty$

Ορισμός Ομοιόμορφης Σύγκλισης

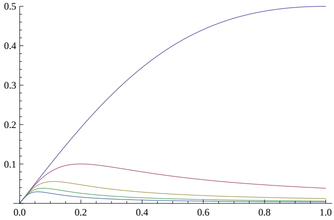
ΟΡΙΣΜΟΣ

Η ακολουθία συναστήσεων συγκλίνει ομοιόμορφα (uniform congergence) στην συνάρτηση $f(x)$ αν

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \text{ ομοιόμορφα}$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall \epsilon \ \forall x \in I \ \exists N(\epsilon) : n > N(\epsilon) \rightsquigarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

Παράδειγμα 2

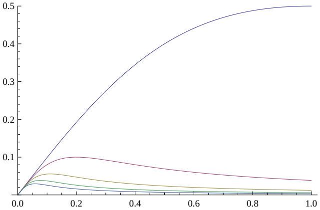
$f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^2x^2}$, $0 \le x \le \infty$ τότε $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 = f(x)$



Παράδειγμα 2 (Σύγκλισης)

Παράδειγμα 2

$$f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2},\ 0 \le x \le 0 \text{ τότε } \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 = f(x)$$



Παρατηρούμε ότι:

$$f_n'(x) = \frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2} \rightsquigarrow f_n'\left(\frac{1}{n}\right) = 0 \rightsquigarrow \max_{x\in I} f_n(x) = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n}$$

$$\rightsquigarrow N(\epsilon, x) = N(\epsilon) = \frac{1}{2\epsilon}$$

$$\forall \epsilon \ \exists N(\epsilon) = \frac{1}{2\epsilon} \ : \ n > N(\epsilon, x) \rightsquigarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

Κριτήριο μή ομοιόμορφης σύγκλισης

(i) Η ακολουθία συναρτήσεων $f_n(x)$ ομοιόμορφα στην συνάρτηση $f(x)$,

(ii) η $f(x)$ είναι ομοιόμορφα συνεχής και

(iii) $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$.

Τότε $f_n(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$.

Κριτήριο μή ομοιόμορφης σύγκλισης

(α′) Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι ομοιόμορφα συνεχής

(β′) $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_0$

(γ′) αν $f_n(x_n)$ **δεν** συγκλίνει

$\Rightarrow$ η ακολουθία $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ **δεν** συγκλίνει ομοιόμορφα

Παράδειγμα 3 (Σύγκλισης)

Παράδειγμα 3: Οι συναρτήσεις $f_n(x) = nx(1-x)^n$ ενώ συγκλίνουν σημειακά στο μηδέν για $x \in [0,\ 1]$. Για κάθε $x \in (0,\ 1)$ έχουμε

$$\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \frac{n+1}{n}\,(1-x) = \left(1+\frac{1}{n}\right)(1-x)$$

Για μεγάλα n θα έχουμε:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)(1-x) < \left(1-\frac{x}{2}\right)$$

οπότε

$$\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} < \left(1-\frac{x}{2}\right) < 1$$

άρα $\lim\limits_{n\to 0} f_n(x) = 0 = f(x)$ σε κάθε σημείο x. Αλλά η ακολουθία $f_n(x)$ **δεν** συγκλίνει ομοιόμορφα επειδή για $x_n = 1/n$ και για μεγάλα n

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-1} \rightsquigarrow f_n\left(\frac{1}{n}\right) > \frac{1}{2\mathrm{e}} \rightsquigarrow |f_n\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right)| > \frac{1}{2\mathrm{e}}$$

Πρόταση 1 (Ομοιόμορφη Σύγκλιση)

Πρόταση 1

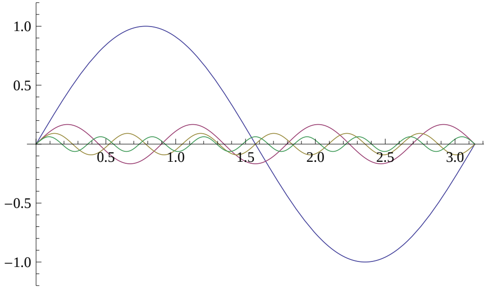
$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \text{ ομοιόμορφα}$$

$$\Updownarrow$$

$$M_n = \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

Παράδειγμα 4: Για κάθε x

$$f_n(x) = \frac{\sin\left(n\,x + x\right)}{n} \rightsquigarrow |f_n(x)| \leq \frac{1}{n} = M_n$$
$$\rightsquigarrow \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0, \text{ ομοιόμορφα}$$



Πρόταση 2 (Κριτήριο Cauchy)

Πρόταση 2 (Κριτήριο Cauchy)

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \text{ ομοιόμορφα}$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall \epsilon \ \forall x \in I \ \exists N(\epsilon) : n > m > N(\epsilon) \rightsquigarrow |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$$

Πρόταση 3 (Ομοιόμορφη Σύγκλιση)

Πρόταση 3

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \text{ ομοιόμορφα}$$

$f_n(x)$ είναι (ομοιόμορφα) συνεχείς στο ανοικτό διάστημα (a, b)

$$\Downarrow$$

$f(x)$ είναι (ομοιόμορφα) συνεχής στο ανοικτό διάστημα (a, b)

Αυτή η πρόταση σημαίνει ότι τα σύμβολα $\lim\limits_{x\to x_0}$ και $\lim\limits_{n\to\infty}$ εναλλάσσονται για συνεχείς συναρτήσεις, που συγκλινουν ομοιόμορφα:

$$\lim_{x\to x_0}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) = \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to x_0} f_n(x)\right)$$

Πρόταση 4 (Ομοιόμορφη Σύγκλιση)

Πρόταση 4:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \text{ ομοιόμορφα}$$

και $f_n(x)$ συνεχείς συναρτήσεις για $x \in [a, b]$

$$\Downarrow$$

$$F_n(x) = \int_a^x f_n(t)\,dt \xrightarrow[n\to\infty]{} F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \text{ ομοιόμορφα}$$

Η Πρόταση 4 σημαίνει ότι τα σύμβολα lim και $\int$ εναλλάσσονται για συνεχείς συναρτήσεις, που συγκλινουν ομοιόμορφα:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b f_n(t)\,dt\right) = \int_a^b \left(\lim_{n\to\infty} f_n(t)\right)\,dt}$$

Πρόταση 5 (Ομοιόμορφη Σύγκλιση)

Πρόταση 5

$f_n(x)$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις με συνεχείς παραγώγους στο διάστημα (a, b)
$f_n(x)$ συγκλίνουν ομοιόμορφα στην συνάρτηση $f(x)$
$f_n'(x)$ συγκλίνουν ομοιόμορφα

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{df_n(x)}{dx} = f'(x) = \frac{d\left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\right)}{dx}}$$

Το παραπάνω συμπέρασμα σημαίνει ότι τα σύμβολα lim και $\dfrac{d}{dx}$ εναλλάσσονται για συνεχείς συναρτήσεις, που συγκλινουν ομοιόμορφα.

Απόδειξη Πρότασης 1 (Ομοιόμορφη σύγκλιση)

Πρόταση 1

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \text{ ομοιόμορφα}$$

$$\Updownarrow$$

$$M_n = \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 0$$

Απόδειξη.

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \text{ ομοιόμορφα}$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall \epsilon \ \forall x \in I \ \exists N\left(\frac{\epsilon}{2}\right) : \ n > N\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \ \rightsquigarrow \ |f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$\rightsquigarrow \ M_n = \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon \ \rightsquigarrow \ \lim_{n\to} M_n = 0$$

Το αντίστροφο αποδεικνύεται ως εξής:

$$M_n = \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall \epsilon \ \exists N(\epsilon) : \ n > N(\epsilon) \ \rightsquigarrow \ M_n < \epsilon \ \rightsquigarrow \ |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

$$\Rightarrow \ \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \text{ ομοιόμορφα}$$

□

Απόδειξη Πρότασης 2 (Κριτήριο Cauchy)

Πρόταση 2 (Κριτήριο Cauchy)

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \text{ ομοιόμορφα}$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall \epsilon \ \forall x \in I \ \exists N(\epsilon) : \ n > m > N(\epsilon) \ \rightsquigarrow \ |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$$

Απόδειξη.

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, ομοιόμορφα $\Rightarrow f_n(x)$ ικανοποιεί το Κριτήριο Cauchy
Εστω $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, ομοιόμορφα, αυτό σημαίνει ότι

$$\begin{aligned} \forall \epsilon \ \forall x \in I \ \exists N\left(\tfrac{\epsilon}{2}\right) : \quad & n > N\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \ \rightsquigarrow \ |f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2} \\ \text{και} \quad & m > N\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \ \rightsquigarrow \ |f_m(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2} \end{aligned}$$

οπότε

$$|f_n(x) - f_m(x)| = |(f_n(x) - f(x)) + (f(x) - f_m(x))| \leq$$

$$\leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < \epsilon$$

επομένως

$$\forall \epsilon \ \forall x \in I \ \exists N(\epsilon) : \ n > m > N(\epsilon) \ \rightsquigarrow \ |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$$

Επομένως αποδείξαμε ομοιόμορφη σύγκλιση $\Rightarrow$ Κριτήριο Cauchy.
Για το αντίστροφο έστω ότι ισχύει το παραπάνω, αυτό σημαίνει ότι για κάθε x σταθερό η ακολουθία $f_n(x)$ είναι μια ακολουθία Cauchy άρα συγκλίνει σε κάθε σημείο σε μια συνάρτηση $f(x)$, δηλαδή

$$\lim_{k\to\infty} f_{m+k}(x) = f(x)$$

$$\forall \epsilon \ \forall x \in I \ \exists N\left(\frac{\epsilon}{2}\right) : \ m > N\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \text{ και } k \geq 0 \rightsquigarrow \ |f_m(x) - f_{m+k}(x)| < \frac{\epsilon}{2}$$

άρα

$$\lim_{k\to\infty} |f_m(x) - f_{m+k}(x)| = |f_m(x) - f(x)| \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

και η ακολουθία $f_n(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα. □

Απόδειξη Πρότασης 3 (Ομοιόμορφη σύγκλιση)(1)

Πρόταση 3

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \text{ ομοιόμορφα}$$

$f_n(x)$ είναι (ομοιόμορφα) συνεχείς στο ανοικτό διάστημα $(a,\ b)$

$$\Downarrow$$

$f(x)$ είναι (ομοιόμορφα) συνεχής στο ανοικτό διάστημα $(a,\ b)$

Απόδειξη.

◇ $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, ομοιόμορφα $\rightsquigarrow$

$$\forall\, \epsilon > 0\ \ \forall\, h\ \ \exists\, n_0\ :\ |f_{n_0}(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3} \text{ και } |f_{n_0}(x+h) - f(x+h)| < \frac{\epsilon}{3}$$

◇ $f_{n_0}(x)$ είναι (ομοιόμορφα) συνεχής στο ανοικτό διάστημα $(a,\ b)$ $\rightsquigarrow$

$$\exists\, \delta(\epsilon) > 0\ :\ \ |h| < \delta(\epsilon)\ \rightsquigarrow\ |f_{n_0}(x+h) - f_{n_0}(x)| < \frac{\epsilon}{3}$$

Οπότε

$$\forall\, \epsilon > 0\ \ \exists\, \delta(\epsilon) > 0\ :\ \ |h| < \delta(\epsilon)\ \rightsquigarrow$$

$$|f(x+h) - f(x)| \leq |f(x+h) - f_{n_0}(x+h)| + |f_{n_0}(x+h) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f(x)| < \epsilon$$

Αρα η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο $(a,\ b)$ □

Απόδειξη Πρότασης 3 (Ομοιόμορφη σύγκλιση)(2)

Αυτή η πρόταση σημαίνει ότι τα σύμβολα $\lim_{x \to x_0}$ και $\lim_{n \to \infty}$ εναλλάσσονται για συνεχείς συναρτήσεις, που συγκλινουν ομοιόμορφα:

$$\boxed{\lim_{x \to x_0}\left(\lim_{n \to \infty} f_n(x)\right) = \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) = \lim_{n \to \infty} f_n(x_0) = \lim_{n \to \infty}\left(\lim_{x \to x_0} f_n(x)\right)}$$

Απόδειξη Πρότασης 4 (Ομοιόμορφη σύγκλιση)(1)

Πρόταση 4:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \text{ ομοιόμορφα}$$

και $f_n(x)$ συνεχείς συναρτήσεις για $x \in [a,\ b]$

$$\Downarrow$$

$$F_n(x) = \int_a^x f_n(t)\,dt \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \text{ ομοιόμορφα}$$

Απόδειξη.

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \text{ ομοιόμορφα}$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall \epsilon > 0 \ \ \forall t \in I \ \ \exists N\left(\frac{\epsilon}{2(b-a)}\right) :$$

$$n > N\left(\frac{\epsilon}{2(b-a)}\right) \rightsquigarrow |f_n(t) - f(t)| < \frac{\epsilon}{2(b-a)}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} |F_n(x) - F(x)| = & \left|\int_a^x (f_n(t) - f(t))dt\right| \leq \\ \leq & \int_a^x |f_n(t) - f(t)|\ dt \leq \tfrac{\epsilon(x-a)}{2(b-a)} < \epsilon \end{aligned}$$

Αρα η ακολουθία $F_n(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάποια συνάρτηση $F(x)$ □

Απόδειξη Πρότασης 4 (Ομοιόμορφη σύγκλιση)(2)

Η Πρόταση 4 σημαίνει ότι τα σύμβολα lim και $\int$ εναλλάσσονται για συνεχείς συναρτήσεις, που συγκλινουν ομοιόμορφα:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b f_n(t)\,dt\right)=\int_a^b\left(\lim_{n\to\infty} f_n(t)\right)\,dt}$$

Παράδειγμα 5 (Σύγκλισης)

Παράδειγμα 5 : Για κάθε $x \in [0,\, 1]$ η ακολουθία $f_n(x) = nx\mathrm{e}^{-nx^2}$ συγκλίνει σημειακά στο 0 αλλά **δεν** συγκλίνει ομοιόμορφα. Για μεγάλα n και $x \in (0,\, 1)$

$$\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \mathrm{e}^{-x^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{-x^2} < 1 \rightsquigarrow \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0, \text{ σημειακά}$$

Αλλά

$$f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right) = \sqrt{\frac{n}{2\mathrm{e}}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

$\rightsquigarrow$ η ακολουθία **δεν** συγκλίνει ομοιόμορφα. Παρατηρούμε ότι:

$$\int_0^1 f_n(x)\, dx = \int_0^1 nx\mathrm{e}^{-nx^2}\, dx = \frac{1 - \mathrm{e}^{-n}}{2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}$$

Αλλά

$$\int_0^1 \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) dx = 0 \neq \lim_{n\to\infty} \left(\int_0^1 f_n(x)\, dx\right) = \frac{1}{2}$$

Παράδειγμα 6: Αν $f_n(x) = \dfrac{n + \sin x}{3n + \cos^2 x}$, να αποδειχθεί ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx = 1$$

Αποδ. Η ακολουθία $f_n(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\frac{1}{3}$ διότι (Πρόταση 1):

$$\left| \frac{n + \sin\, x}{3n + \cos^2\, x} - \frac{1}{3} \right| = \left| \frac{3\sin\, x - \cos^2\, x}{9n + 3\cos^2\, x} \right| \leq \frac{4}{9n} \to 0$$

επομένως από την πρόταση 4 έχουμε:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx = 1$$

Απόδειξη Πρότασης 5 (Ομοιόμορφη Σύγκλιση)

Πρόταση 5

$f_n(x)$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις με συνεχείς παραγώγους στο διάστημα (a, b)
$f_n(x)$ συγκλίνουν ομοιόμορφα στην συνάρτηση $f(x)$
$f'_n(x)$ συγκλίνουν ομοιόμορφα

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{df_n(x)}{dx} = f'(x) = \frac{d\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)}{dx}}$$

Απόδειξη.

$f'_n(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα $\Leftrightarrow$ υπάρχει συνάρτηση $\phi(x)$ τέτοια ώστε:

$$\lim_{n\to\infty} f'_n(x) = \phi(x)$$

Από την Πρόταση 4, έχουμε ότι:

$$f_n(x) - f_n(x_0) = \int_{x_0}^{x} f'_n(t)\,dt \longrightarrow \int_{x_0}^{x} \phi(t)\,dt \quad \text{ομοιόμορφα}$$

δηλαδή

$$\forall \epsilon \ \ \forall x \in I \ \ \exists N_1(\epsilon) \,:\, n > N_1(\epsilon) \rightsquigarrow \left| f_n(x) - f_n(x_0) - \int_{x_0}^{x} \phi(t)\,dt \right| < \frac{\epsilon}{2}$$

Επειδή η ακολουθία $f_n(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην συνάρτηση $f(x)$

$$\forall \epsilon \ \ \exists N_2(\epsilon) \,:\, n > N_2(\epsilon) \rightsquigarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{4} \quad \text{και} \quad |f_n(x_0) - f(x_0)| < \frac{\epsilon}{4}$$

Οπότε γιά ένα $n > \max\{N_1(\epsilon), N_2(\epsilon)\}$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
&\left| f(x) - f(x_0) - \int_{x_0}^{x} \phi(t)\,dt \right| = \\
&= \left| f(x) - f_n(x) - (f(x_0) - f_n(x_0)) + f_n(x) - f_n(x_0) - \int_{x_0}^{x} \phi(t)\,dt \right| \leq \\
&\leq |f(x) - f_n(x)| + |f(x_0) - f_n(x_0)| + \left| f_n(x) - f_n(x_0) - \int_{x_0}^{x} \phi(t)\,dt \right| < \epsilon
\end{aligned}$$

δηλαδή

$$\left\{ \forall \epsilon > 0 \rightsquigarrow ; \left| f(x) - f(x_0) - \int_{x_0}^{x} \phi(t)\,dt \right| < \epsilon \right\} \Rightarrow f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} \phi(t)\,dt$$

$$\Downarrow$$

$$f'(x) = \phi(x) \rightsquigarrow \frac{d}{dx}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{df_n(x)}{dx}\right)$$

□

Το παραπάνω συμπέρασμα σημαίνει ότι τα σύμβολα $\lim$ και $\frac{d}{dx}$ εναλλάσσονται για συνεχείς συναρτήσεις, που συγκλινουν ομοιόμορφα.

ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΣΕΙΡΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Εστω $\{f_n(x),\ n \in \mathbb{N}\}$ μια ακολουθία συναρτήσεων ορισμένων στο διάστημα $I = [a,\ b]$ (ή $(a,\ b]$ ή $[a,\ b)$ ή $(a,\ b)$)

ΟΡΙΣΜΟΣ

Η σειρά συναρτήσεων συγκλίνει ομοιόμορφα (uniform convergence) στην συνάρτηση $S(x)$ αν $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = S(x)$, ομοιόμορφα

$$\Updownarrow$$

Η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην συνάρτηση $S(x)$

$$\Updownarrow$$

$$\forall \epsilon > 0\, \forall x \in I \ \ \exists N(\epsilon)\ :\ n > N(\epsilon)$$

$$\rightsquigarrow\ |S_n(x) - S(x)| = \left| \sum_{k=1}^{n} f_k(x) - S(x) \right| < \epsilon$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall \epsilon > 0\ \ \forall x \in I\ \ \exists N(\epsilon)\ :\ n > m > N(\epsilon)$$

$$\rightsquigarrow\ |S_n(x) - S_m(x)| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} f_k(x) \right| < \epsilon$$

Παράδειγμα 1 (Σύγκλιση Σειρών Συναρτήσεων)

Παράδειγμα 1 Η " γεωμετρική σειρά " συγκλίνει ομοιόμορφα για κάθε $|x| < c < 1$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}}$$

Αποδ.: Εστω $I_c = [-c, c]$ και $0 < c < 1$

$$\sum_{k=0}^{n-1} x^k - \frac{1}{1-x} = \frac{1-x^n}{1-x} - \frac{1}{1-x} = -\frac{x^n}{1-x}$$

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1} x^k - \frac{1}{1-x}\right| = \frac{|x|^n}{1-x} < \frac{c^n}{1-c} < \epsilon < 1 \rightsquigarrow n > \frac{\ln((1-c)\epsilon)}{\ln c} \equiv \delta(\epsilon)$$

Οπότε για κάθε $x \in I_c$ έχουμε ότι η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα, και αυτό ισχύει για κάθε $c < 1$, διότι

$$\forall \epsilon < 1 \text{ και } \forall x \in I_c \, \exists \delta(\epsilon) : \; n > \delta(\epsilon) \rightsquigarrow \left|\sum_{k=0}^{n-1} x^k - \frac{1}{1-x}\right| < \epsilon$$

Επομένως η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα για κάθε $-1 < x < 1$.

Πρόταση 6

$$|f_n(x)| \leq v_n(x) \quad \text{ΚΑΙ} \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x) \quad \text{συγκλίνει ομοιόμορφα}$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad \text{συγκλίνει ομοιόμορφα}$$

Πρόταση 7 Weierstrass M-Test

$$|f_n(x)| \leq M_n \quad \text{ΚΑΙ} \quad \sum_{n=1}^{\infty} M_n \quad \text{συγκλίνει}$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad \text{συγκλίνει ομοιόμορφα}$$

Παράδειγμα 1 Η “ γεωμετρική σειρά ” συγκλίνει ομοιόμορφα για κάθε $|x| < c < 1$

Παράδειγμα 2 Η “ εκθετική σειρά ” συγκλίνει ομοιόμορφα για κάθε $|x| < R$

Απόδειξη Πρότασης 6 (Σύγκλιση Σειρών Συναρτήσεων)

Πρόταση 6

$$|f_n(x)| \leq v_n(x) \quad \text{ΚΑΙ} \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x) \quad \text{συγκλίνει ομοιόμορφα}$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad \text{συγκλίνει ομοιόμορφα}$$

Απόδειξη.

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x) \quad \text{συγκλίνει ομοιόμορφα} \;\Leftrightarrow$$

$$\forall \epsilon \;\; \forall x \in I \;\; \exists N(\epsilon) \, : \, n > m > N(\epsilon) \rightsquigarrow \sum_{k=m+1}^{n} v_k(x) < \epsilon$$

αλλά

$$\left| \sum_{k=m+1}^{n} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |f_k(x)| \leq \sum_{k=m+1}^{n} v_k(x) < \epsilon$$

□

Απόδειξη Πρότασης 7 Weierstrass M-Test

Πρόταση 7 Weierstrass M-Test

$$|f_n(x)| \leq M_n \quad \text{ΚΑΙ} \quad \sum_{n=1}^{\infty} M_n \quad \text{συγκλίνει}$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad \text{συγκλίνει ομοιόμορφα}$$

Απόδειξη.

Είναι η ίδια πρόταση όπως η Πρόταση 6, αλλά εδώ $v_n(x) = M_n$. □

Παράδειγμα 2: Η “ εκθετική σειρά ” συγκλίνει ομοιόμορφα για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Αποδ. Για κάθε x υπάρχει ένα $m \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $|x| < m$ και

$$\forall \ell \geq 0 \rightsquigarrow \frac{x}{m+\ell} \leq \frac{x}{m} < 1$$

$$\mathrm{e}^x \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{m-1} \frac{x^n}{n!} + \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{x^{m+\ell}}{(m+\ell)!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{m-1} \frac{x^n}{n!} + \frac{x^m}{m!}\left(1 + \frac{x}{m+1} + \frac{x^2}{(m+1)(m+2)} + \frac{x^3}{(m+1)(m+2)(m+3)} + \cdots\right)$$

$$\left|\frac{\mathrm{e}^x - \sum_{n=0}^{m-1} \frac{x^n}{n!}}{\frac{x^m}{m!}}\right| = \underbrace{\left(1 + \frac{|x|}{m+1} + \frac{|x|^2}{(m+1)^2} + \frac{|x|^3}{(m+1)^3} + \cdots\right)}_{\text{γεωμετρική σειρά}}$$

δηλαδή η εκθετική σειρά φράσσεται από την γεωμετρική σειρά για κάθε $|x| < m$. Οπότε Πρόταση 6 $\rightsquigarrow$ η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα.

Πρόταση 8 και Πρόταση 9 (Σύγκλιση Σειρών Συναρτήσεων)

Πρόταση 8

Αν η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = S(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα και οι συναρτήσεις $f_n(x)$ είναι συνεχείς σε ένα διάστημα I τότε και η συνάρτηση $S(x)$ είναι συνεχής

Πρόταση 9

Αν η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = S(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα και οι συναρτήσεις $f_n(x)$ και $S(x)$ είναι ολοκληρώσιμες και συνεχείς σε ένα διάστημα I τότε

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b S(x)\, dx$$

Παράδειγμα 3 και 4 (Σύγκλιση Σειρών Συναρτήσεων)

Παράδειγμα 3

Από την γεωμετρική σειρά έχουμε

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \rightsquigarrow \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^x t^k\, dt = \int_0^x \frac{dt}{1-t}$$

$$\ln(1-x) = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1} = -\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots\right)$$

Παράδειγμα 4

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \cdots \rightsquigarrow \arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

Πρόταση 10

Πρόταση 10

Αν η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = S(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα και οι συνάρτήσεις $f_n'(x)$ και $S'(x)$ είναι συνεχείς σε ένα διάστημα I και η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα τότε

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x) = S'(x)$$

Ορισμός

Δυναμοσειρά: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$

Πρόταση 11

Αν για $x = x_0$ η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_0^n$ συγκλίνει

τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ συγκλίνει ομοιόμορφα για κάθε $|x| \leq |x_0|$

Συγκλιση στο σημείο $x_0 \Rightarrow$ ομοιόμορφη σύγκλιση για $|x| \leq |x_0|$

$$R = \sup\{|x_0| \ : \ \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_0^n \text{ συγκλίνει}\}$$

Ακτίνα ομοιόμορφης σύγκλισης δυναμοσειράς

Ορισμός

R ακτίνα ομοιόμορφης σύγκλισης δυναμοσειράς $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$

$\forall\, c < R$ και $\forall\, x \in [-c,\, c[\;\rightsquigarrow\; \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n x^n|$ συγκλίνει ομοιόμορφα η σειρά

$x = \pm R \;\rightsquigarrow\;$ η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\,(\pm R)^n$ είτε συγκλίνει, είτε δεν συγκλίνει

$$\forall\, x \notin (-R,\, R) \;\rightsquigarrow\; \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \quad \textbf{δεν}\ \text{συγκλίνει η σειρά}$$

Παράδειγμα: Η σειρά $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ έχει ακτίνα σύγκλισης 1.

Σημείωση Συνήθως (**ΟΧΙ ΠΑΝΤΑ**!!!) η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς βρίσκεται εφαρμόζοντας
είτε το **κριτήριο του λόγου**

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||x|<1 \ \rightsquigarrow\ |x|<R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

είτε το **κριτήριο της ρίζας**

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}\,|x|<1 \ \rightsquigarrow\ |x|<R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$$

Πρόταση 12

Αν η δυναμοσειρά

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{συγκλίνει ομοιόμορφα για } |x| < R$$

$$\Downarrow$$

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \quad \text{συγκλίνει ομοιόμ. για } |x| < R$$

$$\text{και} \quad S'(x) = s(x)$$

Πρόταση 13

Αν η δυναμοσειρά

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{συγκλίνει απόλυτα για } |x| < R \ \Rightarrow$$

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} \frac{x^n}{n}$$

συγκλίνει ομοιόμορφα για $|x| < R$

$$\text{και} \quad S(x) = \int_0^x s(t)\, dt$$

ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΕΣ- αποδείξεις

Ορισμός

Δυναμοσειρά: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$

Πρόταση 11

Αν για $x = x_0$ η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_0^n$ συγκλίνει

τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ συγκλίνει ομοιόμορφα για κάθε $|x| \leq |x_0|$

Απόδειξη.

Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_0^n$ συγκλίνει $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0 \Rightarrow$

$$\exists\, n_0 \;:\; n > n_0 \;\rightsquigarrow\; |a_n x_0^n| < \frac{1}{2} \;\Rightarrow$$

$$\forall\, |x| < |x_0| \;\rightsquigarrow\; |a_n x^n| = |a_n x_0^n| \left|\frac{x^n}{x_0^n}\right| < \frac{1}{2}\left|\frac{x}{x_0}\right|^n \;\Rightarrow$$

$$|x| < |x_0| \;\rightsquigarrow\; \sum_{n>n_0}^{\infty} \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \quad \text{συγκλίνει} \;\Rightarrow$$

$$\text{M-test} \;\Rightarrow\; \sum_{n>n_0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{συγκλίνει ομοιόμορφα}$$

□

Συκλιση στο σημείο $x_0 \Rightarrow$ ομοιόμορφη σύγκλιση για $|x| \leq |x_0|$

$$R = \sup\{|x_0| \;:\; \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_0^n \text{ συγκλίνει}\}$$

Ανάπτυγμα Maclaurin-Ανάπτυγμα Taylor

Πρόταση 14α- Ανάπτυγμα Maclaurin

Αν $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ συγκλίνει ομοιόμορφα με ακτίνα σύγκλισης R τότε

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n, \qquad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

και

$$f^{(k)}(x) = k! \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} a_n x^{n-k}$$

συγκλίνει ομοιόμορφα με ακτίνα σύγκλισης R

Πρόταση 14 β- Ανάπτυγμα Taylor

Αν $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ συγκλίνει ομοιόμορφα για $|x| < R$, τότε

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n, \qquad a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Απόδειξη Πρότασης 14α- Ανάπτυγμα Maclaurin

Απόδειξη.

Από την πρόταση 12 έχουμε ότι

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \rightsquigarrow f'(0) = a_1$$

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \rightsquigarrow f''(0) = 2 \cdot 1 \cdot a_2 = 2! a_2$$

$$f^{(3)}(x) = \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2) a_n x^{n-3} \rightsquigarrow f^{(3)}(0) = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot a_3 = 3! a_3$$

και γενικά

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) a_n x^{n-k} \rightsquigarrow f^{(k)}(0) = k \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot a_k = k! a_k$$

και οι διαδοχικές παράγωγοι συγκλίνουν ομοιόμορφα με ακτίνα σύγκλισης R $\square$

Απόδειξη Πρότασης 14 β- Ανάπτυγμα Taylor

Πρόταση 14 β- Ανάπτυγμα Taylor

Αν $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ συγκλίνει ομοιόμορφα για $|x-a| < R$, τότε

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n, \qquad a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Απόδειξη.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left((x-a)+a\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x-a)^k a^{n-k} \right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (x-a)^k \left(\sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} a_n a^{n-k} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}}{k!} (x-a)^k$$

□

Λήμμα

Αν $R_n(x) = \dfrac{1}{(n-1)!} \displaystyle\int_{x_0}^{x} (x-t)^{n-1}\, f^{(n)}(t)\, dt$

ολοκλήρωση κατά παράγοντες $\Rightarrow\; R_n = \dfrac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + R_{n+1}(x)$

Ολοκληρωτικός Τύπος TAYLOR

$f(x)$ έχει συνεχείς παραγώγους τάξης $\leq\; n$ στο $[a,\, b]$

$$\Rightarrow\; f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-x_0)^k}{(k)!} f^{(k)}(x_0) + R_n(x)$$

και $R_n(x) = \dfrac{1}{(n-1)!} \displaystyle\int_{x_0}^{x} (x-t)^{n-1}\, f^{(n)}(t)\, dt$

Πόρισμα

Πόρισμα

$$R_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int\limits_{x_0}^{x} \underbrace{(x-t)^{n-1-k}}_{\substack{\text{σταθερό} \\ \text{πρόσημο} \\ \text{για} \quad t \\ \text{μεταξύ } x,\, x_0}} \underbrace{(x-t)^k f^{(n)}(t)}_{\text{ολοκληρώσιμη}} \, dt$$

Πρώτο Θεώρημα Μέσης Τιμής $\rightsquigarrow$ $\exists\, \xi$ μεταξύ x, x_0

$$R_n(x) = \frac{(x-\xi)^k f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!} \frac{(x-x_0)^{n-k}}{(n-k)}$$

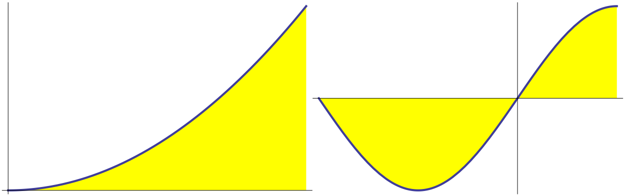
$R_n(x)$ υπόλοιπο Cauchy

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-x_0)^k}{(k)!} f^{(k)}(x_0) + R_n(x)$$

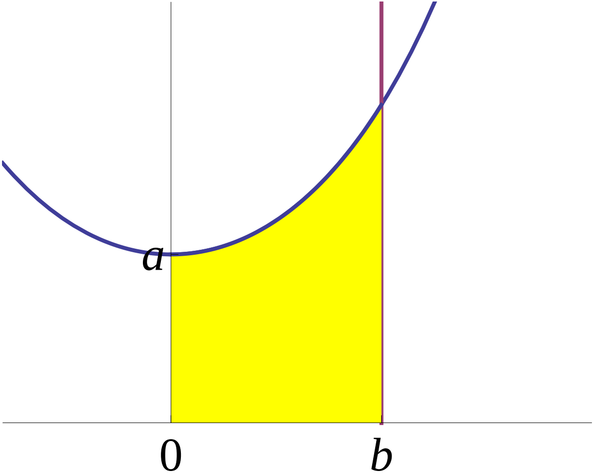
ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΕΜΒΑΔΩΝ (1)

εμβαδόν μεταξύ μιας καμπύλης με $y = f(x)$ και του άξονα Ox

$$S = \int_{x=a}^{x=b} y\,dx = \int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$$

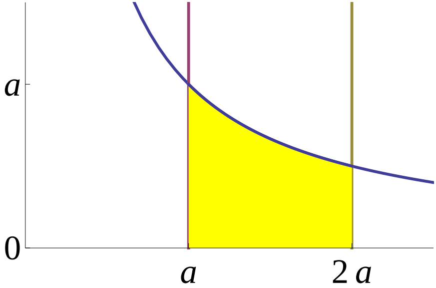


Να βρεθεί το εμβαδόν που περικλείεται από την καμπύλη $y = a\cosh(x/a)$, τον άξονα Ox, από το σημείο O ως και την ευθεία $x = b$



ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΕΜΒΑΔΩΝ (3)

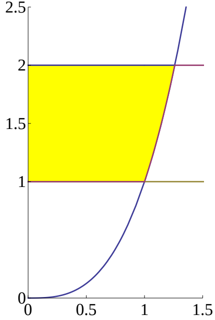
Εμβαδόν που περικλείεται από την υπερβολή $xy = a^2$, τόν άξονα $0x$ και τις ευθείες $x = a$ και $x = 2a$



εμβαδόν μεταξύ μιας καμπύλης με $x = g(y)$, των ευθειών $y = A$, $y = B$ και του άξονα Oy

$$S = \int_{y=A}^{y=B} x\, dy = \int_{y=A}^{y=B} g(y)\, dy$$

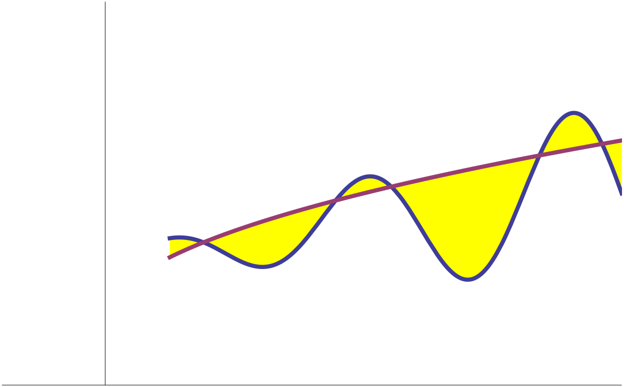
Εμβαδόν που περικλείεται από την καμπύλη $y = x^3$, τον άξονα Oy, τις ευθείες $y = 1$ και $y = 2$



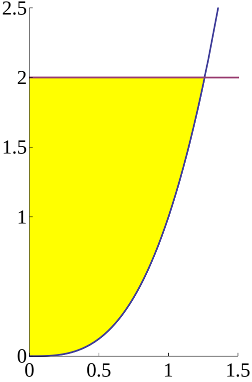
ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΕΜΒΑΔΩΝ (5)

εμβαδόν μεταξύ μιας καμπύλης με $y = f(x)$ και μιας καμπύλης $y = g(x)$

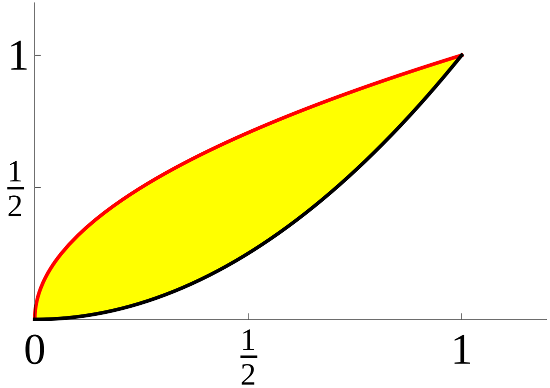
$$S = \int_{x=a}^{x=b} |f(x) - g(x)| \, dx$$



Εμβαδόν που περικλείεται από την καμπύλη $y = x^3$, τον άξονα Oy και την ευθεία $y = 2$

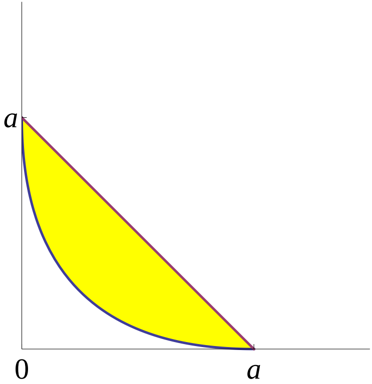


Εμβαδόν που περικλείεται από την καμπύλη $y = \sqrt{x}$ και την ευθεία $y = x^2$

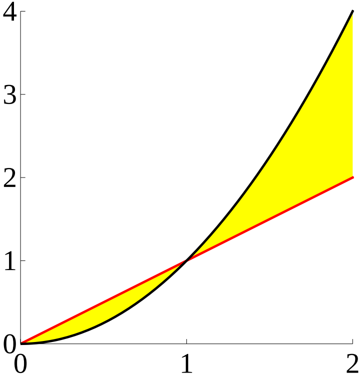


ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΕΜΒΑΔΩΝ (8)

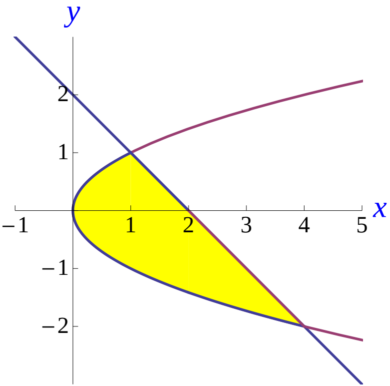
Εμβαδόν που περικλείεται από την καμπύλη $y = (\sqrt{a} - \sqrt{x})^2$ και την ευθεία $y = a - x$ για $0 < x < a$



Εμβαδόν που περικλείεται από την καμπύλη $y = x$ και την ευθεία $y = x^2$ για $0 < x < 2$



Εμβαδόν που περικλείεται από την καμπύλη $x = y^2$ και την ευθεία $y + x = 2$



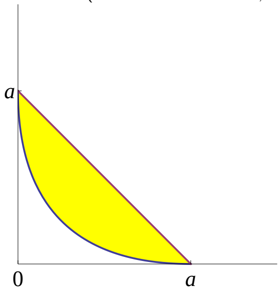
ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΕΜΒΑΔΟΥ ΚΑΜΠΥΛΗΣ – ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ ΜΟΡΦΗ

$x = x(t),\ y = y(t) \geq 0\ \alpha \leq t \leq \beta$

$$\rightsquigarrow \boxed{S = \int_{x=\min(x(\alpha),x(\beta))}^{x=\max(x(\alpha),x(\beta))} y\,dx = \int_{t_{\min}}^{t=\max} y(t)dx(t)}$$

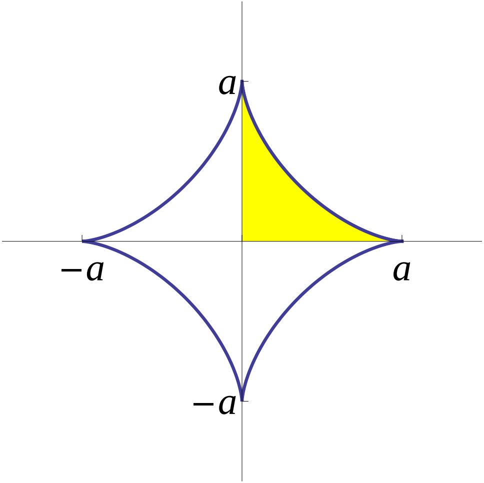
Να βρεθεί το εμβαδόν που περικλείεται από την καμπύλη $x^{1/2} + y^{1/2} = a^{1/2}$, και την ευθεία $x + y = a$

(Θέσατε $x = a\cos^4 t,\ x = a\sin^4 t,\ \pi/2 \geq t \geq 0$)



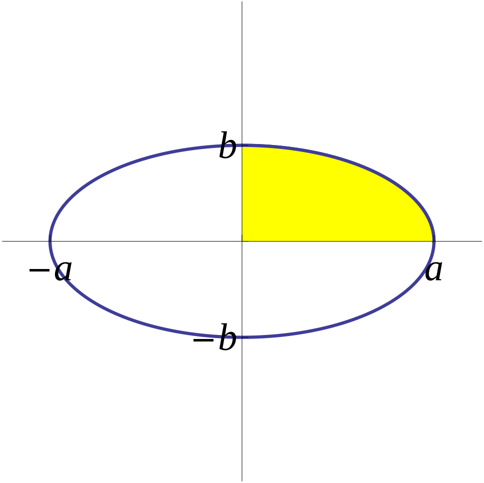
Άσκηση 1

Να βρεθεί το εμβαδόν που περικλείεται από την υποκυκλοειδή
$x = a\cos^3 t \ y = a\sin^3 t$



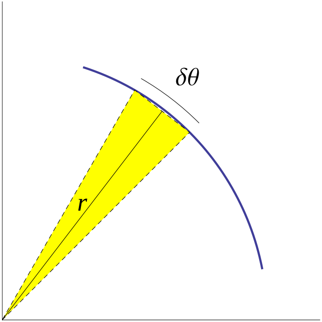
Άσκηση 2

Να βρεθεί το εμβαδόν της έλλειψης $x = a\cos t \ y = b\sin t$, για $0 < t < 2\pi$



Αν η καμπύλη περιγράφεται από την εξίσωση $r = f(\theta)$ για $\theta_1 < \theta < \theta_2$ τότε

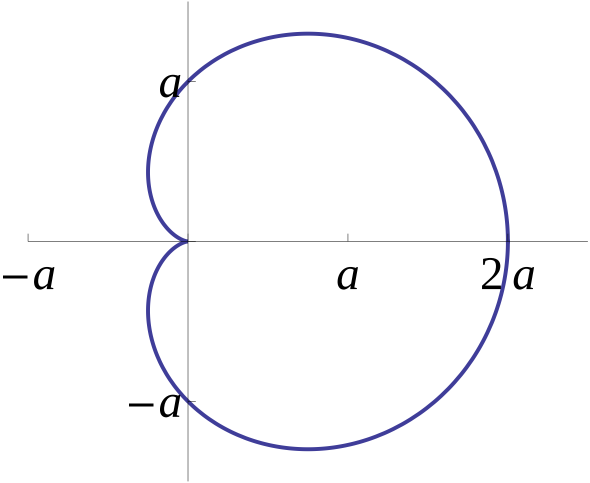
$$S = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} f^2(\theta)\, d\theta$$



$$S = \sum \Delta S, \qquad \Delta S = \frac{r^2 \delta\theta}{2}$$

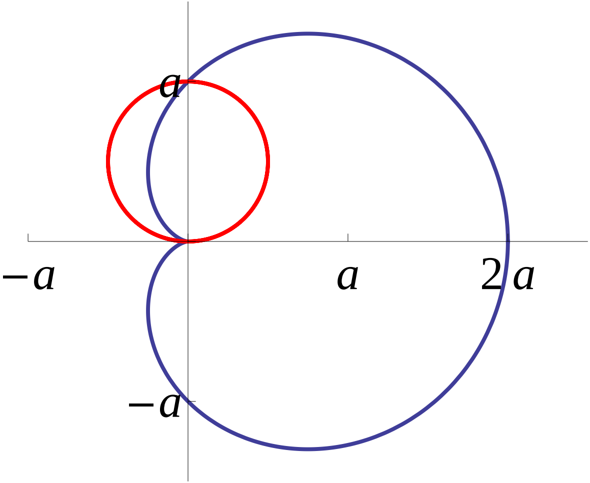
Άσκηση 3

Να βρεθεί το εμβαδόν που περικλείεται από την καρδιοειδή
$r = f(\theta) = a(1 + \cos\theta)$



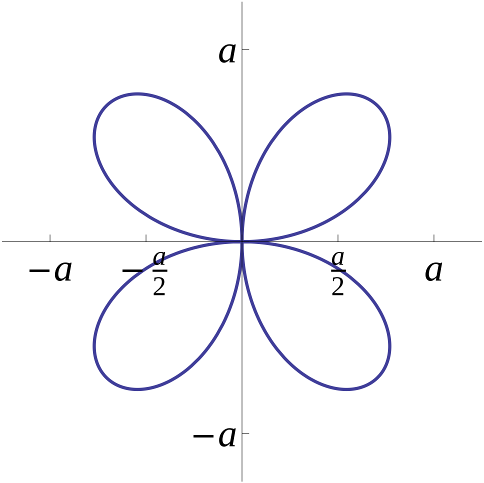
Άσκηση 4

Να βρεθεί το εμβαδόν που ορίζεται από την τομή της καρδιοειδούς $r = a\,(1 + \cos\,\theta)$ και τον κύκλο $r = a \sin\theta$

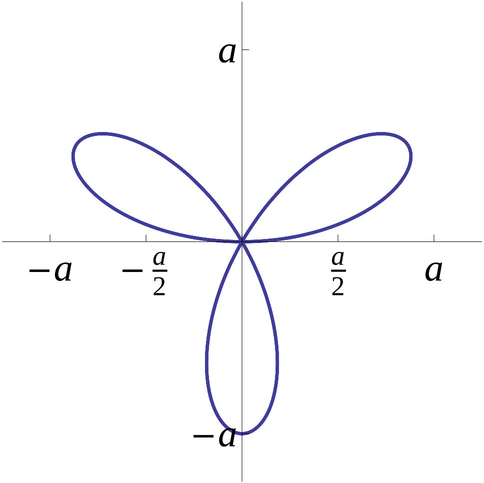


Άσκηση 5

Να βρεθεί το εμβαδόν που ορίζεται από την $r = a \sin 2\theta$

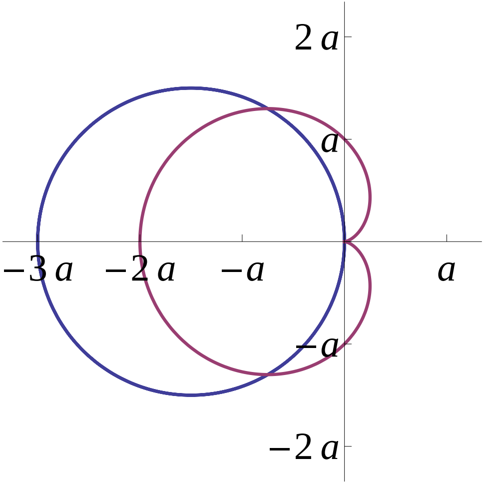


Να βρεθεί το εμβαδόν που ορίζεται από την $r = a \sin 3\theta$



Άσκηση 7

Να βρεθεί το εμβαδόν που ορίζεται από την περιοχή του επιπέδου που είναι εκτός του κύκλου $r = -3a\cos\theta$ και μέσα στην καρδιοειδή $r = a(1 - \cos, \theta)$



ΜΗΚΟΣ ΚΑΜΠΥΛΗΣ

Ορισμός

- $x = x(t),\ y = y(t)\ \alpha \leq t \leq \beta$

$$L = \int_{t=\alpha}^{t=\beta} \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_{t=\alpha}^{t=\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

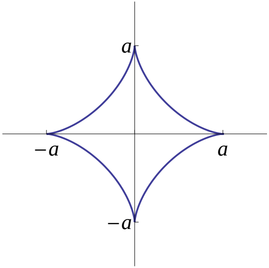
$$L = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

- $r = f(\theta)$

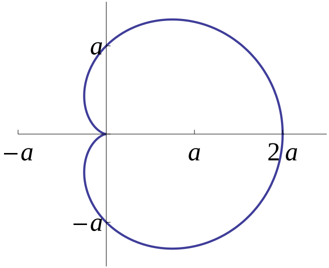
$$L = \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} \sqrt{(f'(\theta))^2 + (f(\theta))^2}\, dx$$

Άσκηση 8

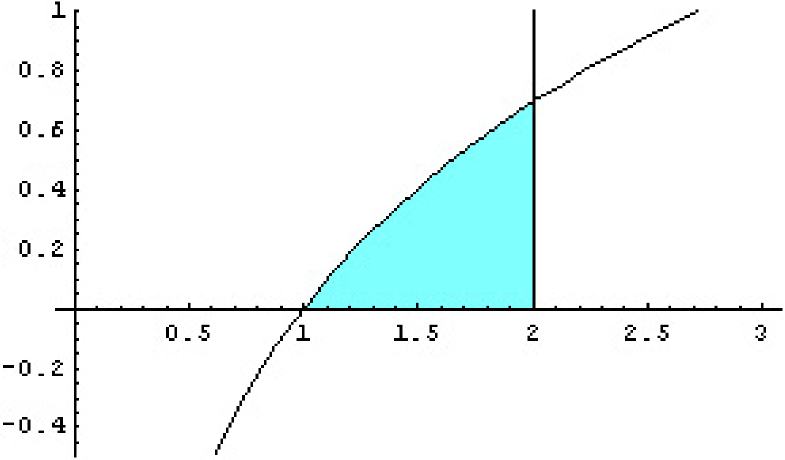
Να βρεθεί το μήκος της υποκυκλοειδούς $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$



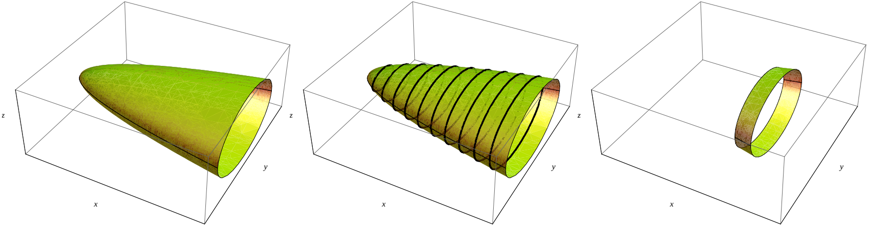
Να βρεθεί το μήκος της καρδιοειδούς $r = f(\theta) = a(1 + \cos\theta)$



Να βρεθεί το εμβαδόν και το μήκος της καμπύλης $y = \ln x$ για $1 \leq x \leq a$.



ΟΓΚΟΣ ΣΩΜΑΤΟΣ ΑΠΟ ΤΟ ΕΜΒΑΔΟΝ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ ΤΟΜΩΝ



$S(x)$ εμβαδόν μιας παράλληλης τομής.
$S(x)\,dx$ όγκος μιας παράλληλης τομής.
όγκος V =άθροισμα όγκων παράλληλων τομών

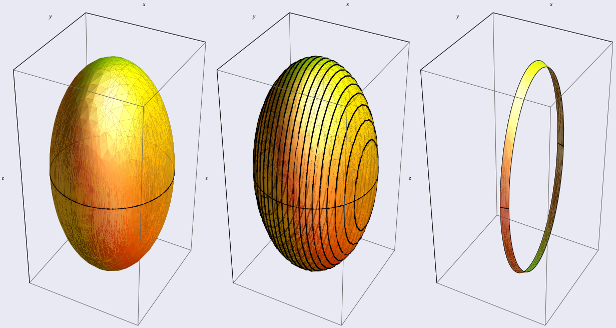
$$\text{όγκος} \quad V = \int_a^b S(x)\,dx$$

Παράδειγμα 1 (Όγκος)

Παράδειγμα

Να υπολογισθεί ο όγκος του ελλειψοειδούς

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



$$S(x) = \pi bc\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \rightsquigarrow V = 4\pi abc/3$$

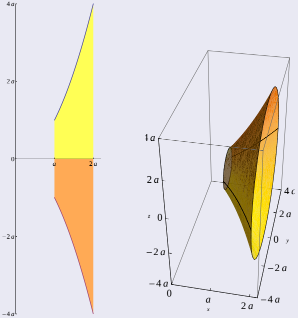
Παράδειγμα 2 (Όγκος)

Αν έχουμε ένα σώμα παράγεται από την περιστροφή της καμπύλης $y = f(x)$ έχει εμβαδόν μιας παράλληλης τομής $S = \pi y^2 = \pi f^2(x)$, $a < x < 2a$ $(a = 1)$

$$\text{όγκος} \quad V = \pi \int_a^b y^2\, dx$$

Παραδειγμα

Να υπολογισθεί ο όγκος ο οποίος παράγεται από την περιστροφή της καμπύλης $y = x^2$ για $a \leq x \leq 2a$ γύρω από τον άξονα $0x$

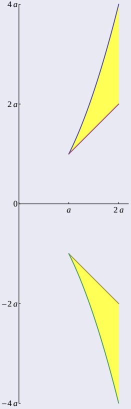


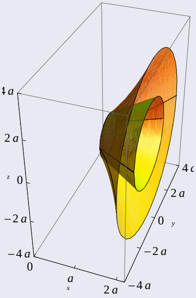
$$V = \pi \int_a^{2a} x^4\, dx = \frac{a^5}{5}\left(2^5 - 1\right)$$

Παράδειγμα 3 (Όγκος)

Παραδειγμα

Να υπολογισθεί ο όγκος ο οποίος παράγεται από την περιστροφή γύρω από τον άξονα $0x$ του χωρίου μεταξύ των καμπύλων $y = x^2$ και $y = x$





για $a \leq x \leq 2a$

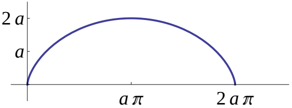
$$V = \pi \int_{a}^{2a} \left(x^4 - x^2\right)\, dx = \frac{a^5}{5}\left(2^5 - 1\right) - \frac{a^3}{3}\left(2^3 - 1\right)$$

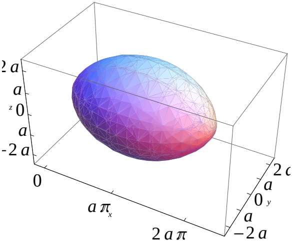
Άσκηση 10

Να υπολογισθεί ο όγκος του σώματος που προκύπτει από την περιστροφή του κυκλοειδούς

$$x = a(t - \sin\ t) \quad y = a(1 - \cos\ t) \quad 0 \leq 0 \leq 2\pi$$

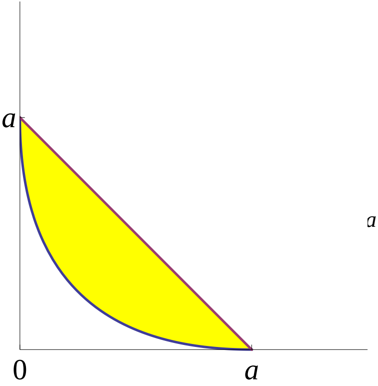
γύρω από τον άξονα Ox. $\quad (\ V = 3\pi a^2)$

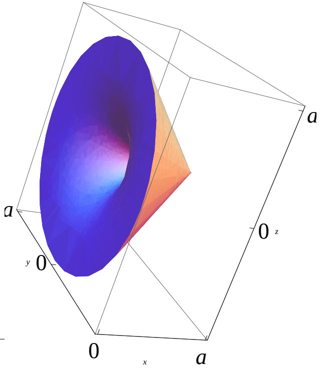




Άσκηση 11

Να βρεθεί ο όγκος που δημιουργείται από την περιστροφή στον άξονα $0x$ του χωρίου, που περικλείεται από την καμπύλη $y = (\sqrt{a} - \sqrt{x})^2$ και την ευθεία $y = a - x$ για $0 < x < a$



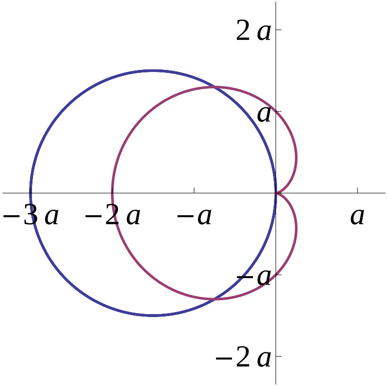


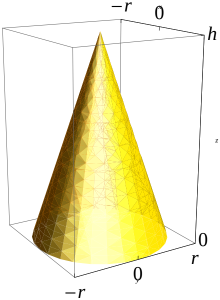
Άσκηση 12α

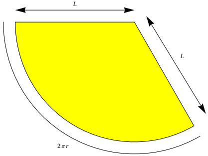
Να υπολογισθεί ο όγκος της αλλυσοειδούς που προκύπτει από την περιστροφή της καμπύλης $y = a\cosh(x/a)$ για $0 \leq x \leq b$

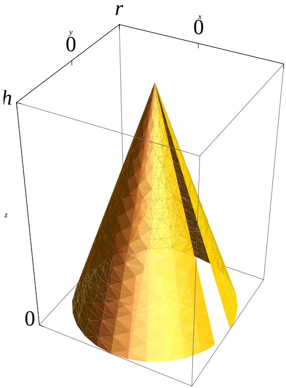
$\left(V = \frac{\pi a^3}{4}\sinh(2b/a) + \pi a^2 b/2 \right)$

Άσκηση 12β



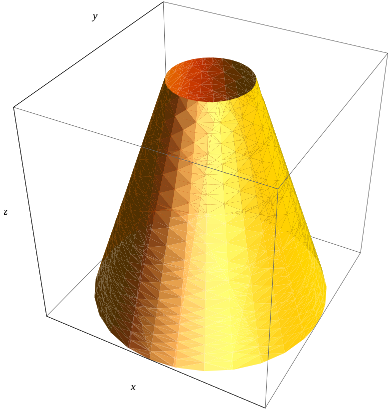


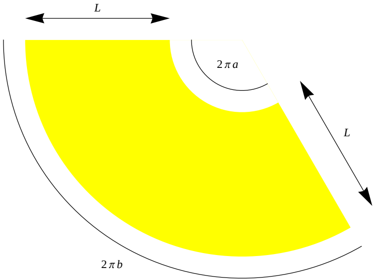




$$S = \pi L r$$

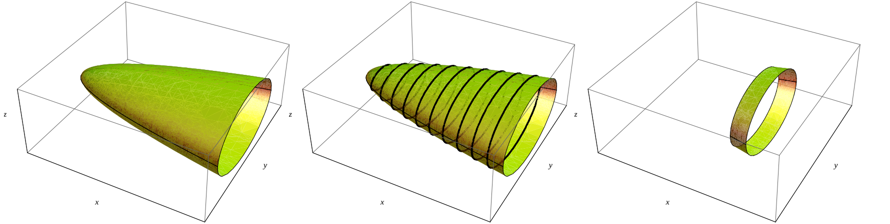
Επιφάνεια κόλουρου κώνου





$$S = 2\pi L \frac{a+b}{2}$$

Εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας



ΔS εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας μιας παράλληλης τομής = παράπλευρη επιφάνεια μικρού κόλουρου κώνου

$$\Delta S \approx 2\pi y \Delta L = 2\pi y \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

επιφάνεια S =άθροισμα παράπλευρων επιφανειών παράλληλων τομών

$$\text{επιφάνεια} \quad S = 2\pi \int_a^b y \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

ΕΜΒΑΔΟΝ ΣΩΜΑΤΟΣ ΑΠΟ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗ

Αν έχουμε ένα σώμα παράγεται από την περιστροφή της καμπύλης $y = f(x) \geq 0$ η επιφάνεια δίνεται από τον τύπο

$$\boxed{S = 2\pi \int_a^b y\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}}$$

Αν $y = f(x)$

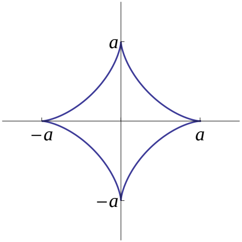
$$\boxed{S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx}$$

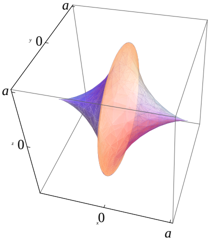
Αν $x = x(t),\ y = y(t)$

$$\boxed{S = 2\pi \int_{t_m}^{t_M} y(t)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt}$$

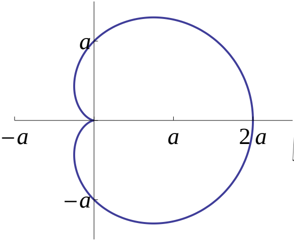
Άσκηση 13

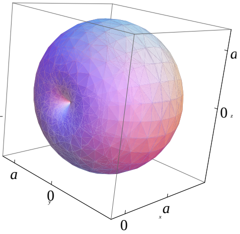
Να βρεθεί η επιφάνεια εκ περιστροφής της υποκυκλοειδούς $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$





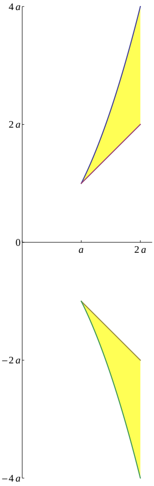
Να βρεθεί η επιφάνεια εκ περιστροφής της καρδιοειδούς $r = f(\theta) = a\,(1 + \cos\,\theta)$

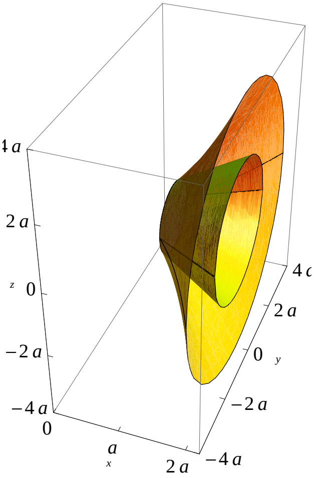




Άσκηση 14

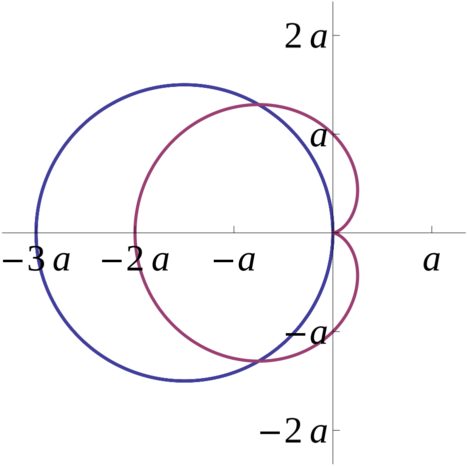
Να υπολογισθεί η έπιφάνεια του στερεού ο οποίος παράγεται από την περιστροφή γύρω από τον άξονα $0x$ του χωρίου μεταξύ των καμπύλων $y = x^2$ και $y = x$ για $1 \leq x \leq 2$





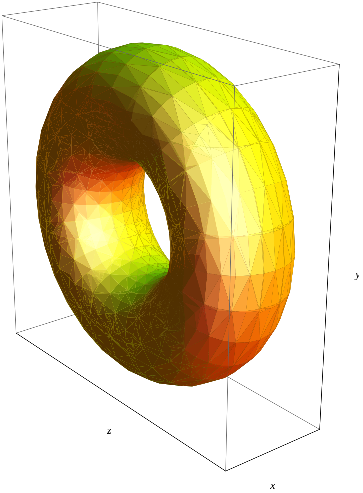
Άσκηση 15

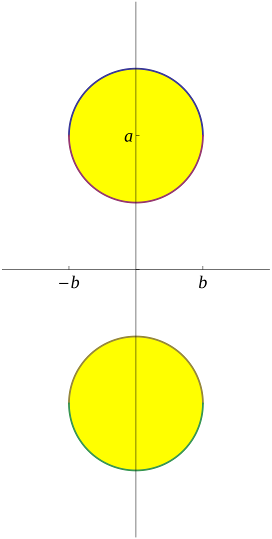
Να βρεθεί ο όγκος και η επιφάνεια του στερεου του στερεού εκ περιστροφής που προκύπτει από την περιοχή του επιπέδου που είναι εκτός του κύκλου $r = -3a\cos\theta$ και μέσα στην καρδιοειδή $r = a(1 - \cos, \theta)$



Παραδειγμα: Torus-Τόρος

Να υπολογισθεί η έπιφάνεια και όγκος του στερεού ο οποίος παράγεται από την περιστροφή γύρω από τον άξονα $0x$ ενός κύκλου.





Βιβλιογραφία

- G. B. Thomas, R. L. Finney
  Απειροστικός Λογισμός,
  Παν. Εκδ. Κρήτης
  §4.2, 4.4, 4.8, §7.1–7.8
- M. Spivak
  Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός,
  Παν. Εκδ. Κρήτης
  Κεφ. 18
- Σ. Ντούγιας
  Απειροστικός Λογισμός- Τόμος Β′ LEADER BOOKS, 2005
  Κεφ. 1

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Δασκαλογιάννης Κωνσταντίνος. 'Λογισμός ΙΙ'. Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:
http://eclass.auth.gr/courses/OCRS433/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία:Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου
Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2013-2014

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης