Θεωρία μέτρου και ολοκλήρωσης

Ενότητα 4: Ολοκλήρωση επί Καρτεσιανών γινομένων

Μιχ. Γ. Μαριάς
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα ενότητας

1. Μέτρα γινόμενο.
2. Θεώρημα Fubini.
3. Το μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}^n$(συνοπτικά)
   i. Πολικές συντεταγμένες.
   ii. Προσέγγιση των συναρτήσεων του L^1 (αλλά και του L^p).

Σκοποί ενότητας

Στην ενότητα αυτή θα ορίσουμε το μέτρο γινόμενο $\mu \times \nu$ επί του μετρήσιμου χώρου $(\mathbb{X} \times \mathbb{Y}, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ δύο σ-πεπερασμένων μετρητών χώρων $(\mathbb{X}, \mathcal{A}, \mu)$ και $(\mathbb{Y}, \mathcal{B}, \nu)$ και θα αποδείξουμε το Θεώρημα Fubini που μας επιτρέπει να υπολογίζουμε ‘διπλά’ ολοκληρώματα ως προς το μέτρο γινόμενο $\mu \times \nu$, ολοκληρώνοντας πρώτα ως προς μ και ύστερα ως προς ν ή ανάποδα, καταπώς μας βολεύει. Τέλος θα ορίσουμε το μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}^n$.

Μέτρα γινόμενο (1)

Όπως έχουμε ήδη δει, το γινόμενο $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ εφοδιάζεται με την σ-άλγεβρα γινόμενο $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ που παράγεται από τα σύνολα

$$A \times B \ \mu\varepsilon \ A \in \mathcal{A} \ \kappa\alpha\iota \ B \in \mathcal{B}.$$

Τα ως άνω σύνολα λέγονται **ορθογώνια** και λαμβάνοντας υπόψην τους τύπους

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D),$$

και

$$(A \times B)^c = (\mathbb{X} \times B^c) \cup (\mathbb{Y} \times A^c),$$

(κάντε ένα σχήμα για να τα δείτε), συμπεραίνουμε ότι οι πεπερασμένες ενώσεις ξένων μεταξύ τους ορθογωνίων αποτελούν μια άλγεβρα του $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$.

Μέτρα γινόμενο (2)

Για το ορθογώνιο $A \times B$, είναι φυσικό να πούμε, ότι ο όγκος του $\lambda(A \times B)$ είναι ίσος με το γινόμενο των όγκων των πλευρών του:

$$\lambda(A \times B) = \mu(A)\nu(B).$$

Επίσης, είναι λογικό να υποθέσουμε ότι αν έχουμε μια ένωση ξένων μεταξύ τους ορθωγωνίων $A_j \times B_j, j \in \mathbb{N}$, τότε

$$\lambda\left(\cup_j \left(A_j \times B_j\right)\right) = \sum_j \lambda\left(A_j \times B_j\right).$$

Έτσι το λ είναι ένα προμέτρο επί της άλγεβρας των ορθογωνίων και από το Θεώρημα 2 (Ενότητα 2) επεκτείνεται κατά μοναδικό τρόπο επι της $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ αφού για την τελευταία, εύκολα διαπιστώνουμε ότι είναι σ-πεπερασμένη.

Μέτρα γινόμενο (3)

Την επέκταση του λ επί της $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$, την συμβολίζουμε με $\mu \times \nu$ και την λέμε **μέτρο γινόμενο**.

Παρατήρηση 1: Το μέτρο γινόμενο $\mu \times \nu$ είναι σχεδόν παντού μη πλήρες ότι και να είναι τα μέτρα μ και ν. Πράγματι, αν $\mathcal{B} \notin P(\mathbb{Y})$ και $\mu(A) = 0$ τότε για κάθε $\mathcal{B} \in P(\mathbb{Y})\backslash\mathcal{B}$,

$$A \times B \notin \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$$

αλλά

$$\mu \times \nu(A \times B) = \mu(A)\nu(B) = 0,$$

αφού η $\mu \times \nu$ ως εξωτερικό μέτρο ορίζεται πάνω σε όλα τα ορθογώνια. Εφεξής θα δουλεύουμε πάντα με την πλήρωση του μέτρου $\mu \times \nu$.

Θεώρημα Fubini (1)

Το Θεώρημα Fubini μας επιτρέπει να υπολογίζουμε ένα ολοκλήρωμα ως προς το μέτρο γινόμενο $\mu \times \nu$, δηλαδή ένα διπλό ολοκλήρωμα με επαναλαμβανόμενα ολοκληρώματα.

Θεώρημα (Fubini): Έστω $(\mathbb{X}, \mathcal{A}, \mu)$ και $(\mathbb{Y}, \mathcal{B}, \nu)$ δύο σ-πεπερασμένοι μετρητοί χώροι και $f: \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \to \mathbb{C}$, μια συνάρτηση $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ –μετρήσιμη. Τότε

1. οι συναρτήσεις

$$x \to |f(x,y)| \; και \; \varphi^*(y) := \int_{\mathbb{X}} |f(x,y)| \, d\mu(x)$$

είναι $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$ μετρήσιμες αντίστοιχα.

Θεώρημα Fubini (2)

Αν επιπλέον

$$\int_{\mathbb{Y}} \varphi^*(y) d\nu(y) = \int_{\mathbb{Y}} d\nu(y) \int_{\mathbb{X}} |f(x,y)|\, d\mu(x) < \infty,$$

τότε $f \in L^1(\mathbb{X} \times \mathbb{Y})$, δηλαδή

$$\int_{\mathbb{X}\times\mathbb{Y}} |f(x,y)|\, d(\mu \times \nu)(x,y) < \infty.$$

Θεώρημα Fubini (3)

2. Έστω $f \in L^1(\mathbb{X} \times \mathbb{Y}, \mu \times \nu)$, τότε οι συναρτήσεις $x \to f(x,y)$ και $y \to f(x,y)$ ανήκουν αντίστοιχα στους $L^1(\mathbb{X}, \mu)$ και $L^1(\mathbb{Y}, \nu)$ σ.π. Οι συναρτήσεις

$$\varphi(y) \coloneqq \int_{\mathbb{X}} f(x,y)d\mu(x) \text{ και } \psi(x) \coloneqq \int_{\mathbb{Y}} f(x,y)d\nu(y),$$

ανήκουν αντίστοιχα στους $L^1(\mathbb{Y}, \nu)$ και $L^1(\mathbb{X}, \mu)$, και

$$\int_{\mathbb{X}\times\mathbb{Y}} |f(x,y)|\, d(\mu \times \nu)(x,y) = \int_{\mathbb{Y}} d\nu(y) \int_{\mathbb{X}} f(x,y)d\mu(x)$$

$$= \int_{\mathbb{X}} d\mu(x) \int_{\mathbb{Y}} f(x,y)d\nu(y) \quad (1)$$

Θεώρημα Fubini (4)

Η απόδειξη του Θεωρήματος είναι αρκετά μεγάλη και θα την δώσουμε σε βήματα. Πρίν, ας κάνουμε μια πολύ σημαντική παρατήρηση.

Παρατήρηση 2: Στην καθημερινή πρακτική, συνήθως μας δίνεται μία $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ –μετρήσιμη συνάρτηση $f(x,y)$ και θέλουμε να δούμε πρώτα αν είναι απολύτως ολοκληρώσιμη, και δεύτερον να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα της.

Από το (1) του θεωρήματος, βλέπουμε ότι για να δούμε αν η $f \in L^1(\mathbb{X}\times\mathbb{Y})$, αρκεί να δείξουμε ότι ένα από τα επαναλαμβανόμενα ολοκληρώματα είναι πεπερασμένο, π.χ. το

$$\int_{\mathbb{Y}} d\nu(y) \int_{\mathbb{X}} |f(x,y)| d\mu(x) < \infty. \quad (2)$$

Θεώρημα Fubini (5)

Έχοντας την (2) από το (2). του θεωρήματος συμπεραίνουμε ότι τα τρία ολοκληρώματα στην (1) είναι πεπερασμένα και ίσα μεταξύ τους. Έτσι το διπλό ολοκλήρωμα υπολογίζεται μέσω των απλούστερων επαναλαμβανόμενων.

Πριν περάσουμε στην απόδειξη, θα δώσουμε δύο αντιπαρα-δείγματα που δείχνουν πως οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Fubini είναι αναγκαίες.

Παράδειγμα 1: Έστω $\mathbb{X} = \mathbb{Y} = [0,1]$ και $\mu = \nu = Lebesgue$. Διαλέγουμε μια αύξουσα ακολουθία $0 < \delta_n \nearrow 1$, και g_n συνεχή και πραγματική με φορέα μέσα στο διάστημα (δ_n, δ_{n+1}) και τ.ω.

$$\int g_n(x)dx = 1.$$

Θεώρημα Fubini (6)

Θέτουμε

$$f(x,y) = \sum_n (g_n(x) - g_{n+1}(x))g_n(y)\,.$$

Παρατηρούμε ότι στο ως άνω άθροισμα, για κάθε (x,y), το πολύ ένας μόνον όρος είναι διάφορος του 0. Αν $x, y \in (\delta_k, \delta_{k+1})$, τότε

$$f(x,y) = (g_k(x) - g_{k+1}(x))g_k(y).$$

Αλλιώς $f(x,y) = 0$. Άρα δεν έχουμε κανένα πρόβλημα με την άθροιση της σειράς.

Θεώρημα Fubini (7)

Με έναν εύκολο υπολογισμό, έχουμε ότι

$$\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)dy = 1 \neq 0 = \int_0^1 dy \int_0^1 f(x,y)dx\,.$$

Ο Fubini λοιπόν δεν ισχύει παρόλο που τα επαναλαμβανόμενα ολοκληρώματα υπάρχουν. Και αυτό γιατί

$$\int_0^1 dx \int_0^1 |f(x,y)|dy = \infty.$$

Θεώρημα Fubini (8)

Παράδειγμα 2: Έστω $\mathbb{X} = \mathbb{Y} = [0,1]$ και $\mu = Lebesgue$ και $\nu = counting\ measure$. Θέτουμε $f(x,y) = 1$ αν $x = y$ και $f(x,y) = 0$ αν $x \neq y$. Εύκολα βλέπουμε ότι

$$\int_0^1 f(x,y)d\mu(x) = 0 \text{ και } \int_0^1 f(x,y)d\nu(y) = 1.$$

Συνεπώς

$$\int_0^1 d\nu(y) \int_0^1 f(x,y)d\mu(x) = 0,$$

ενώ

$$\int_0^1 d\mu(x) \int_0^1 f(x,y)d\nu(y) = 1.$$

Θεώρημα Fubini (9)

Έτσι ο Fubini δεν ισχύει και αυτό γιατί η counting measure δεν είναι σ-πεπερασμένη.

Για την απόδειξη του Θεωρήματος του Fubini χρειαζόμαστε πρώτα ορισμένους συμβολισμούς. Αν $E \subset \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$, ορίζουμε τις τομές ως προς x και y:

$$E_x = \{y \in \mathbb{Y} : (x, y) \in E\} \subset \mathbb{Y},$$

και

$$E^y = \{x \in \mathbb{X} : (x, y) \in E\} \subset \mathbb{X}.$$

Για μια συνάρτηση $f(x, y)$ γράφουμε

$$f_x(y) = f(x, y) = f^y(x).$$

Θεώρημα Fubini (10)

Λήμμα 1: Αν $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, τότε $E_x \in \mathcal{B}$ και $E^y \in \mathcal{A}$. Επίσης, αν η $f(x, y)$ είναι $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ –μετρήσιμη, τότε η f_x είναι $\mathcal{B}$–μετρήσιμη και η f^y είναι $\mathcal{A}$–μετρήσιμη.

Στην συνέχεια θα χρειαστούμε ένα τεχνικό Λήμμα. Μια οικογένεια υποσυνόλων του $\mathbb{X}$ λέγεται **μονότονη κλάση** αν είναι κλειστή ως προς τις ενώσεις αυξουσών ακολουθιών στοιχείων της, καθώς και τις τομές φθινουσών ακολουθιών.

Προφανώς μία σ-άλγεβρα είναι μονότονη κλάση.

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι η τομή μονοτόνων κλάσεων είναι μονότονη κλάση και άρα, αν $\mathcal{E}$ είναι ένα υποσύνολο του $P(\mathbb{X})$, τότε υπάρχει η πιο μικρή μονότονη κλάση που περιέχει την $\mathcal{E}$.

Δίνουμε χωρίς απόδειξη το Λήμμα των μονοτόνων κλάσεων.

Θεώρημα Fubini (11)

Λήμμα 2 (των μονοτόνων κλάσεων): Αν $\mathcal{A}$ είναι μια άλγεβρα του $\mathbb{X}$, τότε η μονότονη κλάση που παράγεται από την $\mathcal{A}$ συμπίπτει με την σ-άλγεβρα που παράγει η $\mathcal{A}$.

Το ως άνω Λήμμα, το χρειαζόμαστε για την απόδειξη της πρότασης που ακολουθεί, που είναι ο Fubini για χαρακτηριστικές συναρτήσεις, και συνεπώς είναι το αποφασιστικό βήμα της απόδειξης του θεωρήματος.

Πρόταση 1: Έστω $(\mathbb{X}, \mathcal{A}, \mu)$ και $(\mathbb{Y}, \mathcal{B}, \nu)$ δύο σ-πεπερασμένοι μετρητοί χώροι. Αν $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, τότε οι συναρτήσεις $x \to \nu(E_x)$ και $y \to \mu(E^y)$ είναι μετρήσιμες επί του $\mathbb{X}$ και $\mathbb{Y}$ αντίστοιχα, και

$$(\mu \times \nu)(E) = \int \nu\,(E_x) d\mu(x) = \int \mu(E^y) d\nu(y)\,. (3)$$

Θεώρημα Fubini (12)

Βήμα 1. Ας υποθέσουμε ότι τα μέτρα μ και ν είναι πεπερασμένα.

Ας είναι $\mathcal{C}$ η κλάση των υποσυνόλων του $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ που ικανοποιούν την (3). Θα δείξουμε ότι $\mathcal{C}$ είναι μονότονη κλάση και ότι περιέχει τα ορθογώνια. Συνεπώς περιέχει και την $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.

Έχουμε λοιπόν

$$(A \times B)_x = \begin{cases} B, & \alpha\nu\ x \in A \\ \emptyset, & \alpha\nu\ \acute{o}\chi\iota \end{cases}$$

Άρα

$$\nu\big((A \times B)_x\big) = \begin{cases} \nu(B), & \alpha\nu\ x \in A \\ 0 & \alpha\nu\ \acute{o}\chi\iota \end{cases} = \nu(B)\mathcal{X}_A(x),$$

Θεώρημα Fubini (13)

και

$$\int \nu\big((A \times B)_x\big) d\mu(x) = \int \nu(B) \mathcal{X}_A(x) d\mu(x)$$

$$= \nu(B)\mu(A). \qquad (4)$$

Και αντίστοιχα για το $(A \times B)^y$. Άρα τα ορθογώνια ανήκουν στην $\mathcal{C}$. Από την αθροισιμότητα έχουμε επίσης ότι και οι πεπερασμένες ενώσεις ορθογωνίων, ξένων μεταξύ τους, ανήκουν στην $\mathcal{C}$. Έτσι η $\mathcal{C}$ είναι άλγεβρα.

Κατόπιν, θα δείξουμε ότι αν $\mathcal{C} \ni A_j \nearrow$, τότε και $A = U_j A_j \in \mathcal{C}$. Για αυτό θα χρησιμοποιήσουμε Μονότονη σύγκλιση. Θέτουμε

Θεώρημα Fubini (14)

$$f_n(x) = \nu\big((A_n)_x\big).$$

Οι συναρτήσεις f_n είναι μετρήσιμες, θετικές και αυξάνουν προς την

$$f(x) = \nu(A_x).$$

Άρα από την Μονότονη σύγκλιση έχουμε

$$\int f(x)d\mu(x) = lim \int f_n(x)d\mu(x) = lim \int \nu\big((A_n)_x\big)d\mu(x)$$

$$= lim(\mu \times \nu)(A_n) = (\mu \times \nu)(A),$$

από την συνέχεια από κάτω του μέτρου $\mu \times \nu$. Έτσι

$$\int \nu(A_x)d\mu(x) = \mu \times \nu(A),$$

Θεώρημα Fubini (15)

δηλαδή το $A = U_j A_j$ ικανοποιεί την (3) και συνεπώς $A = U_j A_j \in \mathcal{C}$.

Τέλος, αν $\mathcal{C} \ni A_j \searrow$ και $A = \bigcap_j A_j$, τότε οι συναρτήσεις $f_n(x) = \nu\big((A_n)_x\big)$ είναι μετρήσιμες, φραγμένες από το $\nu(A_x)$ (εδώ ακριβώς χρησιμοποιείται η υπόθεση ότι τα μέτρα είναι πεπερασμένα) και φθίνουν προς την $f(x) = \nu(A_x)$. Άρα από την Κυριαρχούμενη σύγκλιση

$$\int f(x) d\mu(x) = lim \int f_n(x) d\mu(x) = lim \int \nu\big((A_n)_x\big) d\mu(x)$$

$$= lim(\mu \times \nu)(A_n) = (\mu \times \nu)(A).$$

Θεώρημα Fubini (16)

Συνεπώς $A = \bigcap_j A_j \in \mathcal{C}$ και η απόδειξη είναι πλήρης για την περίπτωση των πεπερασμένων μέτρων.

Βήμα 2. Αν τώρα έχουμε σ-πεπερασμένους χώρους, τότε

$$\mathbb{X} \times \mathbb{Y} = U_j\left(A_j \times B_j\right), \mu\varepsilon\ A_j \nearrow\ \ \kappa\alpha\iota\ B_j \nearrow,$$

και τα μέτρα είναι πεπερασμένοι επί των A_j, B_j. Άρα από τα προηγούμενα, για κάθε μετρήσιμο $E \subset \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$, ισχύει

$$(\mu \times \nu)\left(E \cap \left(A_j \times B_j\right)\right) = \int \nu\left(E_x \cap B_j\right) \mathcal{X}_{A_j}(x) d\mu(x).$$

και από την μονότονη σύγκλιση έχουμε

$$(\mu \times \nu)(E) = \int \nu\left(E_x\right) d\mu(x).$$

Θεώρημα Fubini (17)

Απόδειξη [του **Fubini**]: Ας ξεκινήσουμε υποθέτοντας ότι

$$|f(x,y)| = \mathcal{X}_{A\times B}(x,y) = \mathcal{X}_A(x)\mathcal{X}_B(y).$$

Σε αυτήν την περίπτωση το (1). του Θεωρήματος Fubini είναι ακριβώς η Πρόταση 1. Πράγματι, συνδυάζοντας τις (3) και (4) έχουμε ότι

$$\iint \mathcal{X}_{A\times B}(x,y)d(\mu\times\nu)(x,y) = (\mu\times\nu)(A\times B)$$

$$= \int \nu\left((A\times B)_x\right)d\mu(x) = \int \nu(B)\mathcal{X}_A(x)d\mu(x)$$

$$= \int\left(\int \mathcal{X}_B(y)d\nu(y)\right)\mathcal{X}_A(x)d\mu(x) =$$

Θεώρημα Fubini (18)

$$= \int \left(\int \mathcal{X}_B(y)\mathcal{X}_A(x) d\nu(y) \right) d\mu(x)$$

$$= \int \left(\int \mathcal{X}_{A\times B}(y) d\nu(y) \right) d\mu(x),$$

δηλαδή ο Fubini για χαρακτηριστικές.

Άρα το Θεώρημα ισχύει και για τις απλές συναρτήσεις. Τώρα στην γενική περίπτωση η $|f(x,y)|$ είναι θετική και μετρήσιμη. Συνεπώς προσεγγίζεται από μια αύξουσα ακολουθία θετικών και απλών συναρτήσεων s_n. Έχουμε λοιπόν ότι

$$s_n(x,y) \to |f(x,y)| \text{ για κάθε } (x,y).$$

Θεώρημα Fubini (19)

Θέτουμε

$$\varphi_n^*(y) := \int_{\mathbb{X}} s_n(x,y)d\mu x$$

και έχουμε από την Πρόταση 1 ότι

$$\int_{\mathbb{Y}} \varphi_n^*(y)d\nu(y) = \int_{\mathbb{X}\times\mathbb{Y}} s_n(x,y)d(\mu\times\nu)(x,y) \quad (5)$$

Τώρα, από την Μονότονη σύγκλιση έχουμε ότι

$$\varphi_n^*(y) \nearrow \varphi^*(y) \; \gamma\iota\alpha \; \kappa\alpha\theta\varepsilon \; y \in \mathbb{Y}.$$

Ξανά, από την Μονότονη σύγκλιση για τα ολοκληρώματα στην (5), έπεται ότι

Θεώρημα Fubini (20)

$$\int_{\mathbb{Y}} \varphi^*(y) d\nu(y) = \int_{\mathbb{X}\times\mathbb{Y}} |f(x,y)| d(\mu\times\nu)(x,y)$$

ή

$$\int_{\mathbb{Y}} \left(\int_{\mathbb{X}} |f(x,y)| d(\mu) x \right) d\nu(y)$$

$$= \int_{\mathbb{X}\times\mathbb{Y}} |f(x,y)| d(\mu\times\nu)(x,y)$$

Συνεπώς η $f \in L^1(\mathbb{X}\times\mathbb{Y})$ και η ισότητα του διπλού ολοκληρώματος με το επαναλαμβανόμενο ισχύει για την θετική συνάρτηση $|f(x,y)|$.

Θεώρημα Fubini (21)

Τέλος, για να δείξουμε την (1) στην γενική περίπτωση $f: \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \to \mathbb{C}$, αναλύουμε την f σε πραγματικό και φανταστικό μέρος, και στην συνέχεια σε θετικά και αρνητικά μέρη όπου έχουμε το αποτέλεσμα από τα παραπάνω.

Το μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ (συνοπτικά) (1)

Αν μ είναι το μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}$, το μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}^n$ είναι η πλήρωση του

$$(\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}\otimes\ldots.\otimes\mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \mu\times\cdots\times\mu)$$

Συνήθως γράφουμε μ ή μ^n για το μέτρο του Lebesgue στον $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ και για τα ολοκληρώματα

$$\int_{\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}} f(x)d\mu(x) \text{ ή } \int_{\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}} f(x)d(x).$$

Επισημαίνουμε ότι αν η $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann, τότε είναι και κατά Lebesgue και τα δύο ολοκληρώματα συμπίπτουν.

Το μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ (συνοπτικά) (2)

Τις περισσότερες φορές έχουμε να κάνουμε με ομαλές συναρτήσεις και έτσι ο υπολογισμός ενός ολοκληρώματος ανάγεται στον υπολογισμό του ολοκληρώματος Riemann κατά τα γνωστά. Θα αναφέρουμε χωρίς απόδειξη (προς το παρόν) τις ιδιότητες του μέτρου Lebesgue.

Πρόταση 2: Το μέτρο Lebesgue είναι αμετάβλητο από τις μεταθέσεις, δηλαδή

- για κάθε A μετρήσιμο και κάθε $x \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$,
$$\mu(A+x) = \mu(A),$$
- αν η f είναι στον L^1, τότε
$$\int f(x+y)dy = \int f(y)dy\,.$$

Το μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}^n$ (συνοπτικά) (3)

Πρόταση 3: (Κανονικότητα του μέτρου Lebesgue): Για κάθε μετρήσιμο σύνολο E του $\mathbb{R}^n$,

$$\mu(E) = \inf\{\mu(U); E \subset U \; και \; U \; ανοικτό\}$$
$$= \sup\{\mu(K); K \subset E \; και \; K \; συμπαγες\}.$$

Αλλαγή συντεταγμένων (1)

Πρόταση 4: (**Αλλαγή συντεταγμένων**): Έστω U ανοικτό του $\mathbb{R}^n$ και

$$\mathbb{R}^n \supset U \xrightarrow{T} T(U) \xrightarrow{f} \mathbb{C},$$

όπου T είναι ένας C^1 μετασχηματισμός και $f \in L^1\big(T(U)\big)$. Τότε

$$\int_{T(U)} f(x)dx = \int_U \ (foT)(y)|detDT(y)|dy \,, (6)$$

όπου DT είναι η παράγωγος του μετασχηματισμού.

Αλλαγή συντεταγμένων (2)

Παίρνοντας $f = 1$ στην (6), έχουμε ότι

$$\mu\big(T(U)\big) = |detDT(y)|\mu(U).$$

Άρα, αν T είναι γραμμικός μετασχηματισμός και $detT = 1$, τότε αφήνει το μ αμετάβλητο. Έτσι

Πόρισμα 1: Το μέτρο Lebesgue είναι αμετάβλητο από τις στροφές.

Πολικές συντεταγμένες (1)

Ως συνήθως,

$$S_{n-1}(x_0, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x_0\| = r\},$$

είναι η σφαίρα με κέντρο το x_0 και ακτίνα r. Οι πολικές συντεταγμένες του $x \in \mathbb{R}^n$ είναι οι

$$r = \|x\| \in [0, \infty) \; \kappa\alpha\iota \; \theta = \frac{x}{\|x\|} \in S_{n-1}(0,1).$$

Ο μετασχηματισμός

$$x \rightsquigarrow (r, \theta)$$

είναι ένα προς ένα και επί από τον $\mathbb{R}^n - \{0\}$ στο $[0, \infty) \times S_{n-1}(0,1)$.

Πιο αναλυτικά. Κάθε στοιχείο $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, γράφεται στις πολικές συνταταγμένες ως εξής:

Πολικές συντεταγμένες (2)

αν

$$r = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2},$$

και

$$\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{n-2} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \theta_{n-1} \in (0, 2\pi),$$

τότε

$$x_1 = r\sigma\upsilon\nu\theta_1\sigma\upsilon\nu\theta_2 \ldots \sigma\upsilon\nu\theta_{n-2}\sigma\upsilon\nu\theta_{n-1},$$

$$x_2 = r\sigma\upsilon\nu\theta_1\sigma\upsilon\nu\theta_2 \ldots \sigma\upsilon\nu\theta_{n-2}\eta\mu\theta_{n-1},$$

$$x_3 = r\sigma\upsilon\nu\theta_1\sigma\upsilon\nu\theta_2 \ldots \sigma\upsilon\nu\theta_{n-3}\eta\mu\theta_{n-2},$$

Πολικές συντεταγμένες (3)

$$x_4 = r\sigma\upsilon\nu\theta_1\sigma\upsilon\nu\theta_2 \dots \eta\mu\theta_{n-3},$$
$$\vdots$$
$$x_{n-1} = r\sigma\upsilon\nu\theta_1\eta\mu\theta_2,$$
$$x_n = r\eta\mu\theta_1$$

Γράφουμε

$$x = (x_1, \dots, x_n) = (r, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1}) = (r, \theta) = r\theta.$$

Το μέτρο του Lebesgue στις πολικές γράφεται ως εξής:

$$dx = r^{n-1}\sigma\upsilon\nu^{n-2}\theta_1\sigma\upsilon\nu{\theta_2}^{n-1} \dots \sigma\upsilon\nu\theta_{n-1}drd\theta_1 \dots d\theta_{n-1}$$
$$= r^{n-1}drd\sigma(\theta).$$

Πολικές συντεταγμένες (4)

Προφανώς, το

$$d\sigma(\theta) = \sigma\upsilon\nu^{n-2}\theta_1 \sigma\upsilon\nu\theta_2{}^{n-1} \dots \sigma\upsilon\nu\theta_{n-1} d\theta_1 \dots d\theta_{n-1}$$

είναι το επιφανειακό μέτρο της μοναδιαίας σφαίρας $S_{n-1}(0,1)$ και έτσι ο Lebesgue γράφεται σαν μέτρο γινόμενο επί του $[0,\infty) \times S_{n-1}(0,1)$:

$$dx = r^{n-1} dr \times d\sigma(\theta).$$

Τέλος, το επιφανειακό μέτρο της σφαίρας $S_{n-1}(0,r)$ είναι ίσο με

$$r^{n-1} d\sigma(\theta).$$

Έχουμε λοιπόν την ολοκλήρωση σε πολικές:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx =$$

Πολικές συντεταγμένες (5)

$$= \int_0^\infty r^{n-1} dr \int_{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \theta_{n-1} \in (0, 2\pi),} f(r, \theta) d\sigma(\theta)$$

$$= \int_0^\infty r^{n-1} dr \int_{S_{n-1}(0,1)} f(r, \theta) d\sigma(\theta).$$

Αν η f εξαρτάται μόνο από την ακτίνα, τότε

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \int_0^\infty r^{n-1} dr \int_{S_{n-1}(0,1)} f(r, \theta) d\sigma(\theta)$$

$$= \int_0^\infty r^{n-1} f(r) dr \int_{S_{n-1}(0,1)} d\sigma(\theta)$$

$$= |S_{n-1}(0,1)| \int_0^\infty f(r) r^{n-1} dr,$$

Πολικές συντεταγμένες (6)

όπου $|S_{n-1}(0,1)|$ είναι ο όγκος της μοναδιαίας σφαίρας.

Στην Πρόταση που ακολουθεί υπολογίζουμε τον όγκο $|S_{n-1}(0,1)|$ της σφαίρας.

Πρόταση 5:

$$|S_{n-1}(0,1)| = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

Απόδειξη: Χρειαζόμαστε το ολοκλήρωμα του Gauss

$$G_n = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-a\|x\|^2} dx\,, a > 0,$$

το οποίο είναι πολύ σημαντικό στην Ανάλυση.

Πολικές συντεταγμένες (7)

Περνώντας στις πολικές συντεταγμένες έχουμε:

$$G_2 = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-a\|x\|^2} dx = 2\pi \int_0^{\infty} e^{-ar^2} r dr = \frac{\pi}{a}$$

και λόγω χωρισμένων μεταβλητών έπεται οτι

$$G_1 = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \text{ και } G_n = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{n}{2}}.$$

Τώρα επειδή η $e^{-a\|x\|^2}$ είναι ακτινική,

$$\pi^{n/2} = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|^2} dx = |S_{n-1}(0,1)| \int_0^{\infty} e^{-r^2} r^{n-1} dr =$$
$$|S_{n-1}(0,1)| \int_0^{\infty} e^{-s} s^{\frac{n}{2}-1} ds = |S_{n-1}(0,1)| \Gamma\left(\frac{n}{2}\right),$$

Πολικές συντεταγμένες (8)

απο τον τύπο της συνάρτησης Γ.

Πόρισμα 2:

$$|B_n(0,1)| = \frac{|S_{n-1}(0,1)|}{n} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

Προσέγγιση των συναρτήσεων του L^1 (αλλά και του L^p) (1)

Ένα από τα ατού της θεωρίας ολοκλήρωσης του Lebesgue είναι η προσέγγιση των μετρήσιμων συναρτήσεων με απλές συναρτήσεις

$$s(x) = \sum_{1}^{N} a_j \mathcal{X}_{A_j}(x)\,,$$

όπου $a_j \in \mathbb{C}$ και A_j μετρήσιμα σύνολα.

Αν τώρα $f \geq 0$ και $f \in L^1, 1 \leq p < \infty$, τότε η f, ως μετρήσιμη συνάρτηση, προσεγγίζεται από μια ακολουθία απλών συναρτήσεων $0 \leq s_k \leq f$: $\forall \varepsilon > 0, \exists N$ τ.ω.

$$|f(x) - s_k(x)| \leq \varepsilon, \forall x \; \kappa\alpha\iota \; \forall k \geq N.$$

Προσέγγιση των συναρτήσεων του L^1 (αλλά και του L^p) (2)

Όμως, $f - s_k \in L^1$ και από την κυριαρχούμενη σύγκλιση έχουμε

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - s_k(x)|\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{k\to\infty} |f(x) - s_k(x)|\, dx = 0,$$

δηλαδή η f προσεγγίζεται από την s_k με την έννοια του L^1.

Για την γενική περίπτωση γράφουμε $f = f^+ + f^-$, κ.λ.π.

Ένας χώρος συναρτήσεων, που όπως θα δείξουμε, είναι παντού πυκνός στους L^1 είναι ο

$$C_0^\infty(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}, f\ \varepsilon\iota\nu\alpha\iota\ C^\infty\ \kappa\alpha\iota\ 0\ \varepsilon\xi\omega\ \alpha\pi\omicron\ \varepsilon\nu\alpha\ \sigma\upsilon\mu\pi\alpha\gamma\varepsilon\varsigma\}$$

Προσέγγιση των συναρτήσεων του L^1 (αλλά και του L^p) (3)

Ο χώρος αυτός είναι πιο χρήσιμος στην Ανάλυση από ότι οι απλές ή οι συνεχείς συναρτήσεις λόγω της ομαλότητας των στοιχείων του.

Ένας κλασσικός κάτοικος του $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ είναι η

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{e^{\|x\|^2-1}}, & \alpha\nu\ \|x\|^2 \leq 1, \\ 0, & \alpha\nu\ \|x\|^2 > 1. \end{cases}$$

Πράγματι,

$$\varphi(x) = f(\|x\|^2 - 1),$$

όπου

$$f(t) = \begin{cases} e^{\frac{1}{t}}, & \alpha\nu\ t \leq 0, \\ 0, & \alpha\nu\ t > 0. \end{cases}$$

Προσέγγιση των συναρτήσεων του L^1 (αλλά και του L^p) (4)

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι η f είναι C^∞ αφού όλες οι παράγωγοί της τείνουν στο 0 καθώς το $t \to 0$.

Διαιρώντας την φ με το $\int \varphi$, έχουμε μια συνάρτηση ψ η οποία είναι C^∞, θετική, έχει φορέα την κλειστή μπάλλα $B(0,1)$, και $\int_{\mathbb{R}^n} \psi = 1$.

Με την βοήθεια των ως άνω συναρτήσεων, "σιδερώνουμε" οποιαδήποτε συνάρτηση με συμπαγή φορέα, την κάνουμε C^∞ χωρίς να μεγαλώσουμε πολύ τον φορέα της. Αυτό είναι το περιεχόμενο της Πρότασης που ακολουθεί.

Πρόταση 6: Ο $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ είναι παντού πυκνός στον $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Βιβλιογραφία

1. G.B. Folland, Real Analysis, Modern techniques and their applications, John Wiley and sons, 1984, New York.
2. P. Malliavin, Integration et Probabilites, Analyse de Fourier et Analyse Spectrale, Masson, 1982, Paris.
3. Μιχ. Γ. Μαριάς, Μαθήματα Αρμονικής ανάλυσης, Εκδόσεις ζήτη, 2001, Θεσσαλονίκη.
4. W.Rudin, Real and Complex Analysis, McGraw-Hill, 1970, New York.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Μιχάλης Μαριάς. «Θεωρία μέτρου και ολοκλήρωσης. Ενότητα 4: Ολοκλήρωση επί Καρτεσιανών γινομένων». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

http://eclass.auth.gr/courses/OCRS436/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου

Θεσσαλονίκη, Χειμερινό εξάμηνο 2014-2015