ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Λογισμός 4

Ενότητα 3: Το Θεώρημα του Lebesgue.

Μιχ. Γ. Μαριάς
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα ενότητας

1. Σύνολα μηδενικού μέτρου.
2. Το Θεώρημα του Lebesgue.

Σκοποί ενότητας

Στην ενότητα αυτή θα αποδείξουμε το θεώρημα του Lebesgue που προσδιορίζει επακριβώς την κλάση των ολοκληρωσίμων κατά Riemann συναρτήσεων.

Σύνολα μηδενικού μέτρου (1)

Πρίν όμως χρειαζόμαστε τα σύνολα μηδενικού μέτρου.

Σύνολα μηδενικού μέτρου

Θυμίζουμε πρώτα ότι μια οικογένεια συνόλων $A_1, A_2, \ldots$ είναι μια κάλυψη του συνόλου $A \subset \mathbb{R}^n$, αν

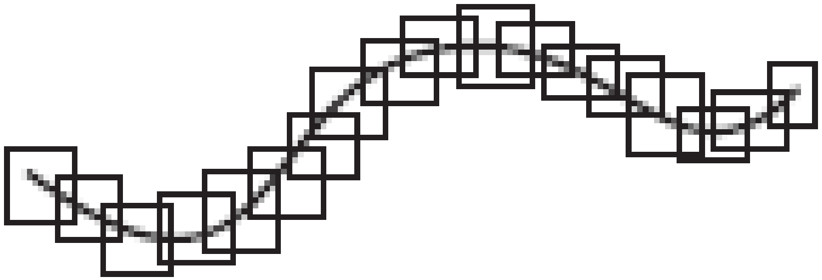
$$A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k .$$

Ορισμός Ένα σύνολο $A \subset \mathbb{R}^n$ είναι μηδενικού μέτρου αν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει μια κάλυψη $S_1, S_2, \ldots$ από ορθογώνια τ.ω.

$$\sum_{k=1}^{\infty} |S_k| \leq \varepsilon.$$

Γράφουμε $|A| = 0$. (Δες Σχήμα 1)

Σύνολα μηδενικού μέτρου (2)



Σχήμα 1

Σύνολα μηδενικού μέτρου (3)

Παράδειγμα 1: Ένα αριθμήσιμο σύνολο $A = \{a_1, a_2, \dots\} \subset \mathbb{R}^n$ είναι μέτρου μηδέν. Πράγματι, για κάθε $\varepsilon > 0$, μπορούμε να καλύψουμε το A με ορθογώνια S_k με κέντρο το a_k και όγκο $\frac{\varepsilon}{2^k}$, οπότε

$$\sum_{k=1}^{\infty} |S_k| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \varepsilon.$$

Άμεση συνέπεια είναι το

Παράδειγμα 2: Ένα πεπερασμένο σύνολο είναι μέτρου μηδέν.

Σύνολα μηδενικού μέτρου (4)

Με τον ίδιο περίπου τρόπο, μπορούμε να δείξουμε την

Πρόταση 1: Κάθε αριθμήσιμη ένωση συνόλων μέτρου μηδέν, είναι μέτρου μηδέν.

Απόδειξη: Πράγματι, ας είναι

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

και

$$|A_k| = 0, k = 1,2, \ldots$$

Άρα, για κάθε $\varepsilon > 0$ και για κάθε k, έχουμε μια κάλυψη $S_k^1, S_k^2, \ldots$ του A_k που ικανοποιεί

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left|S_k^j\right| \leq \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Σύνολα μηδενικού μέτρου (5)

Τώρα, τα σύνολα S_k^j είναι προφανώς μια αριθμήσιμη κάλυψη του A που ικανοποιεί

$$\sum_k \sum_j |S_k^j| \leq \sum_{k\geq 1} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon,$$

δηλαδή το A είναι μέτρου μηδέν.

Παρατήρηση 1: Αν το B είναι υποσύνολο ενός συνόλου A μέτρου μηδέν, τότε και το B είναι μέτρου μηδέν, αφού κάθε κάλυψη του A είναι και κάλυψη του B.

Σύνολα μηδενικού μέτρου (6)

Μια άλλη σημαντική κλάση συνόλων μηδενικού μέτρου είναι η ακόλουθη:

Παρατήρηση 2: Ένα σύνολο $A \subset \mathbb{R}^n$ διάστασης $\leq n-1$ είναι μηδενικού μέτρου. Αν π.χ. το α είναι πεπερασμένο ευθύγραμμο τμήμα του $\mathbb{R}^2$, τότε, λόγω συμπάγειας, μπορούμε να το καλύψουμε με ένα πεπερασμένο πλήθος ορθογωνίων $S_1, S_2, \dots, S_k$ με πλευρές 1 και $\frac{\varepsilon}{k}$. Άρα

$$|S_j| = 1 \times \frac{\varepsilon}{k}$$

και συνεπώς

$$\sum_{j=1}^{\infty} |S_j| \leq k \times \frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon.$$

Το Θεώρημα του Lebesgue (1)

Όπως είπαμε ήδη, το θεώρημα του Lebesgue προσδιορίζει την κλάση των ολοκληρωσίμων κατά Riemann συναρτήσεων. Για την απόδειξη του χρειαζόμαστε την έννοια της αιώρησης μιας συνάρτησης την οποία και ορίζουμε αμέσως.

Έστω

$$B(x,r) = \{y: \|x-y\| < r\}$$

η μπάλα με κέντρο x και ακτίνα r. Θέτουμε

$$M(x,f,r) = \sup_{y\in B(x,r)} f(y), \qquad m(x,f,r) = \inf_{y\in B(x,r)} f(y)$$

και

$$\Delta(x,f,r) = M(x,f,r) - m(x,f,r).$$

Το Θεώρημα του Lebesgue (2)

Η **αιώρηση** $\omega(f,x)$ της f στο x είναι το όριο

$$\omega(f,x)=\lim_{r\to 0}\Delta(f,x,r)\,.$$

Βέβαια, πρέπει πρώτα να δείξουμε ότι το παραπάνω όριο υπάρχει. Παρατηρούμε λοιπόν ότι η διαφορά $\Delta(x,f,r)$ είναι θετική και φθίνει με την ακτίνα r, αφού για $r \geq r$’ έχουμε

$$M(x,f,r)\geq M(x,f,r'),$$

ενώ

$$m(x,f,r)\leq m(x,f,r')\Rightarrow -m(x,f,r)\geq -m(x,f,r')$$

Συνεπώς, για $r \geq r$’,

$$\begin{aligned}\Delta(x,f,r)&=M(x,f,r)-m(x,f,r)\\&\geq M(x,f,r')-m(x,f,r')=\Delta(x,f,r').\end{aligned}$$

Το Θεώρημα του Lebesgue (3)

Εφόσον λοιπόν η θετική $\Delta(x,f,r)$ φθίνει έχουμε

$$\lim_{r\to 0} \Delta(x,f,r) \geq 0.$$

Η αιώρηση είναι το κριτήριο της συνέχειας της f. Πράγματι:

Πρόταση 2: Η f είναι συνεχής στο x ανν $\omega(f,x) = 0.$

Απόδειξη: Αν η f είναι συνεχής στο x, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $r > 0$ τ.ω.

$$|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

για κάθε y που ικανοποιεί $\|x - y\| \leq r$, δηλαδή για κάθε $y \in B(x,r)$. Άρα,

$$f\big(B(x,r)\big) \subset |f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon|,$$

Το Θεώρημα του Lebesgue (4)

δηλαδή

$$diamf\big(B(x,r)\big) \le 2\varepsilon.$$

και συνεπώς

Άρα,

$$\begin{aligned} \Delta(x,f,r) &= M(x,f,r) - m(x,f,r) \\ &= \sup_{y\in B(x,r)} f(y) - \inf_{y\in B(x,r)} f(y) \le 2\varepsilon \end{aligned}$$

και συνεπώς $\omega(f,x) = 0$.

Αντίστροφα τώρα. Αν $\omega(f,x) = 0$, τότε

$$\Delta(x,f,r) = \sup_{y\in B(x,r)} f(y) - \inf_{y\in B(x,r)} f(y) \le \varepsilon,$$

δηλαδή

$$diamf\big(B(x,r)\big) \le \varepsilon$$

Το Θεώρημα του Lebesgue (5)

και συνεπώς

$$|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon, \forall y \in B(x, r).$$

Θεώρημα 1: (Lebesgue) Έστω $f: \Pi \rightarrow \mathbb{R}$ φραγμένη. Η f είναι ολοκληρώσιμη ανν το σύνολο

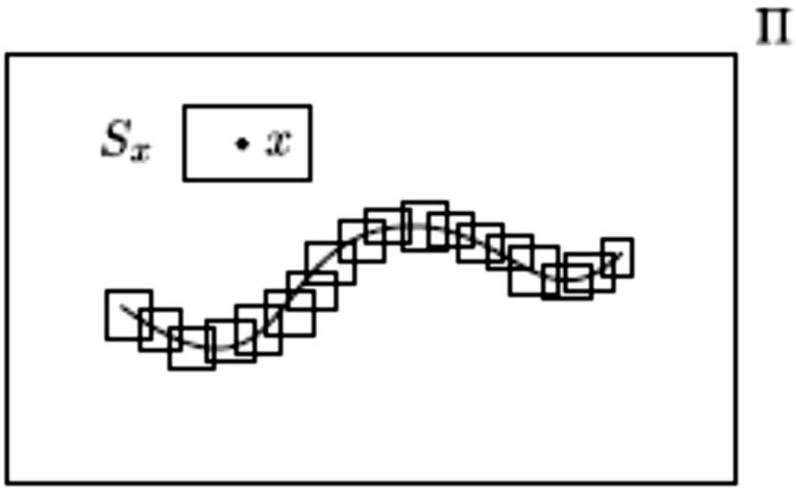
$$B = \{x: f\ \alpha\sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\eta\varsigma\ \sigma\tau o\ x\}$$

των ασυνεχειών της είναι μέτρου 0.

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι το B είναι μέτρου 0 και ας είναι $\varepsilon > 0$. Το B, το οποίο στο Σχήμα 2 παριστάνεται με μία καμπύλη, μπορεί να καλυφθεί με ορθογώνια $\{S_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ τ.ω.

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} |S_j| \quad (1)$$

Το Θεώρημα του Lebesgue (6)



Σχήμα 2

Το Θεώρημα του Lebesgue (7)

Τώρα, αν $x \in \Pi - B$, η f είναι συνεχής στο x. Συνεπώς μπορώ να βρώ ένα ορθογώνιο S_x που περιέχει το x και ικανοποιεί

$$M_{S_x}(f) - m_{S_x}(f) \leq \varepsilon. \text{ (2)}$$

Όμως, οι παραπάνω οικογένειες $\{S_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ και $\{S_x\}_{x\in\Pi-B}$ αποτελούν μια κάλυψη του συμπαγούς Π. Άρα υπάρχει μια πεπερασμένη κάλυψη του Π, ας πούμε η

$$S_{j1}, \dots, S_{jk}, S_{x1} \dots, S_{xl}.$$

Τέλος, ας είναι Δ μια διαμέριση του Π που τα ορθογώνια της περιέχονται στα ως άνω ορθογώνια. Από τις (1) και (2), έχουμε

Το Θεώρημα του Lebesgue (8)

$$
\begin{aligned}
&U_\Delta(f) - L_\Delta(f) \\
&\qquad \le \sum_{m\le k} \left\{M_{S_{jm}}(f) - m_{S_{jm}}(f)\right\} |S_{jm}| \\
&\qquad + \sum_{i\le l} \left\{M_{S_{x_i}}(f) - m_{S_{x_i}}(f)\right\} |S_{x_i}| \\
&\qquad = 2 \sup_{x\in \Pi} |f(x)| \sum_{m\le k} |S_{jm}| + \varepsilon \sum_{i\le l} |S_{x_i}| \\
&\qquad \le 2 \sup_{x\in \Pi} |f(x)|\, \varepsilon + \varepsilon |\Pi|,
\end{aligned}
$$

δηλαδή η f είναι ολοκληρώσιμη.

Το Θεώρημα του Lebesgue (9)

Αντίστροφα τώρα. Υποθέτουμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη και θέλουμε να δείξουμε ότι $|B| = 0$. Για αυτό θα εκφράσουμε το B χρησιμοποιώντας την αιώρηση της f. Έχουμε

$$B = \{x: f \ \alpha\sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\eta\varsigma \ \sigma\tau o \ x\} = \bigcup_{k\geq 1} B_k \,,$$

όπου

$$B_k = \left\{x: \omega(f, x) \geq \frac{1}{k}\right\}.$$

Αφού το B εκφράστηκε σαν αριθμήσιμη ένωση των B_k, αρκεί να δείξουμε ότι το μέτρο των B_k είναι 0 για κάθε k.

Το Θεώρημα του Lebesgue (10)

Ας είναι λοιπόν Δ μια διαμέριση του ορθογωνίου Π

τ.ω.

$$U_{\Delta}(f) - L_{\Delta}(f) \leq \frac{\varepsilon}{k}. (3)$$

Συμβολίζουμε με $\mathfrak{G}$ την κλάση των ορθογωνίων της Δ που τέμνουν το B_k.

Έχουμε

$$B_k \cap S \neq \emptyset$$

για κάθε $S \in \mathfrak{G}$, και συνεπώς

$$M_S(f) - m_S(f) = \sup_{y \in S} f(y) - \inf_{y \in S} f(y) \geq \frac{1}{k}.$$

Το Θεώρημα του Lebesgue (11)

Άρα,

$$\sum_{S\in}\{M_S(f)-m_S(f)\}|S| \geq \frac{1}{k}\sum_{S\in}|S|\,.\,(4)$$

Τώρα, από την (3) έχουμε

$$\begin{aligned}&\sum_{S\in}\{M_S(f)-m_S(f)\}|S|\\ &\leq \sum_{S\in\Delta}\{M_S(f)-m_S(f)\}|S|\\ &= U_\Delta(f)-L_\Delta(f) \leq \frac{\varepsilon}{k}. \qquad (5)\end{aligned}$$

Από τις (4) και (5) συμπεραίνουμε ότι

Το Θεώρημα του Lebesgue (12)

$$\frac{1}{k}\sum_{s\in}|S| \leq \sum_{S\in}\{M_S(f)-m_S(f)\}|S| \leq \frac{\varepsilon}{k}. \quad (6)$$

και αφού τα ορθογώνια S που τέμνουν το B_k το καλύπτουν κιόλας, έχουμε την (6) το ζητούμενο, δηλαδή

$$|B_n| \leq \sum_{s\in}|S| \leq \varepsilon.$$

Βιβλιογραφία

1. Γ. Γεωργανόπουλος, *Ολοκληρωτικός Λογισμός Πολλών Μεταβλητών*, Εκδόσεις Αδελφοί Κυριακίδη, Θεσσαλονίκη, 1995.
2. Τ. Χατζηαφράτης, *Απειροστικός Λογισμός σε Πολλές Μεταβλητές*, Αθήνα, 1996.
3. J. Marsden, A. Tromba, *Διανυσματικός Λογισμός*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 2000.
4. M. Spivac, *Λογισμός σε Πολλαπλότητες*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 1994.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Μιχάλης Μαριάς. «Λογισμός 4. Ενότητα 3: Το Θεώρημα του Lebesgue». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

http://eclass.auth.gr/courses/OCRS437/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου
Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2014-2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ