ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Λογισμός 4

Ενότητα 4: Ιδιότητες του Ολοκληρώματος.

Μιχ. Γ. Μαριάς
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Περιεχόμενα ενότητας

1. Ιδιότητες του Ολοκληρώματος.
2. Ολοκλήρωση επί φραγμένων συνόλων.

Σκοποί ενότητας

Χρησιμοποιώντας για τον ορισμό του ολοκληρώματος πότε τα αθροίσματα Riemann και πότε τα αθρίσματα Darboux, ανάλογα με το ποιο βολεύει καλύτερα, μπορούμε να αποδείξουμε τις ακόλουθες ιδιότητες.

Ιδιότητες του Ολοκληρώματος (1)

Πρόταση 1: (**Γραμμικότητα**) Αν οι $f, g\colon \Pi \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμες, τότε για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, η $\lambda f + \mu g$ είναι ολοκληρώσιμη και

$$\int_{\Pi} \lambda f + \mu g = \lambda \int_{\Pi} f + \mu \int_{\Pi} g\,.$$

Απόδειξη: Είναι άμεση συνέπεια του ορισμού και της ισότητας των αθροισμάτων Riemann:

$$R_{\Delta}(\lambda f + \mu g) = \lambda R_{\Delta}(f) + \mu R_{\Delta}(g).$$

Ιδιότητες του Ολοκληρώματος (2)

Πρόταση 2: (**Θετικότητα**) Αν η $f\colon \Pi \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη και θετική, τότε

$$\int_{\Pi} f \geq 0.$$

Απόδειξη: Είναι προφανής, αφού για κάθε διαμέριση Δ

$$R_{\Delta}(f) = \sum_{S\in\Delta} f(\xi_S)|S| \geq 0.$$

Ιδιότητες του Ολοκληρώματος (3)

Πρόταση 3: Αν η $f : \Pi \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη, τότε και η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη και

$$\left| \int_{\Pi} f \right| \leq \int_{\Pi} |f| \leq \sup_{\Pi} |f| |\Pi| .$$

Στην απόδειξη της επόμενης πρότασης θα χρειαστούμε την χαρακτηριστική συνάρτηση $\mathcal{X}_A$ ενός συνόλου A, η οποία δίνεται από τον τύπο

$$\mathcal{X}_A(x) = \begin{cases} 1 & \alpha\nu\ x \in A, \\ 0 & \alpha\nu\ x \notin A. \end{cases}$$

Επισημαίνουμε ότι πολλές φορές η χαρακτηριστική συμβολίζεται επίσης με 1_A.

Ιδιότητες του Ολοκληρώματος (4)

Πρόταση 4: Αν η $f: \Pi \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παντού 0 εκτός ίσως από ένα σύνολο μέτρου 0, τότε είναι ολοκληρώσιμη και

$$\int_{\Pi} f = 0.$$

Απόδειξη: Ας είναι B το σύνολο όπου η f είναι διάφορη του μηδενός. Η f είναι ολοκληρώσιμη αφού το σύνολο των ασυνεχειών της είναι το B, και από την υπόθεση $|\mathrm{B}| = 0$. Άρα για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει μια κάλυψη του B από ορθογώνια S_j τ.ω.

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} |S_j| \leq \varepsilon.$$

Ιδιότητες του Ολοκληρώματος (5)

Θέτουμε

$$U = \bigcup_j S_j \supset B$$

και

$$f = f\chi_U + f\chi_{U^c} = f\chi_U$$

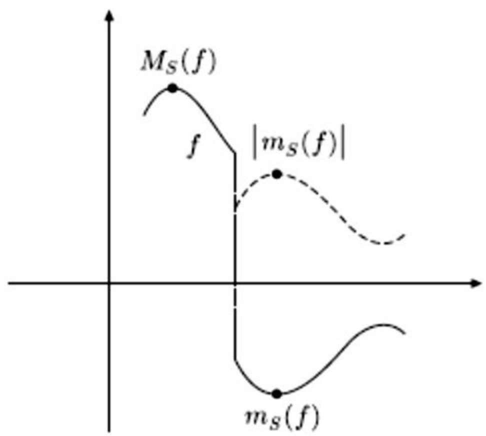
αφού η f είναι 0 στο U^c. Από την προηγούμενη πρόταση έχουμε

$$\left|\int_\Pi f\right| = \left|\int_\Pi f\chi_U\right| \le sup|f|\int_\Pi \mathcal{X}_U = |U| sup|f| \le \varepsilon sup|f|$$

για κάθε $\varepsilon > 0$, δηλαδή

$$\int_\Pi f = 0.$$

Ιδιότητες του Ολοκληρώματος (6)



Σχήμα 1

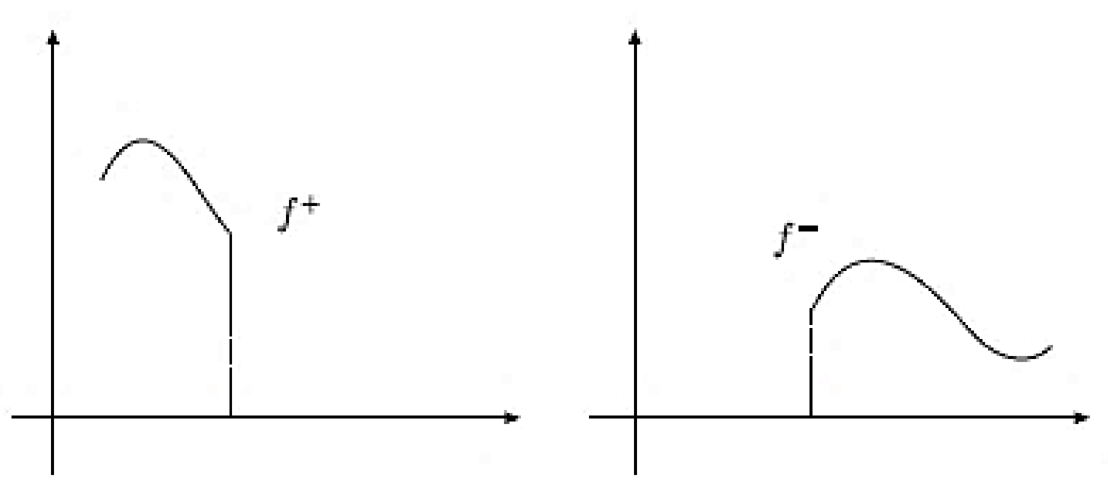
Αν f είναι μια πραγματική συνάρτηση, π.χ. αυτή του σχήματος 1, τότε όπως βλέπουμε στο Σχ. 2, το θετικό μέρος f^+ της f δίνεται από τον τύπο

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\},$$

ενώ το αρνητικό μέρος f^- της f είναι

$$f^-(x) = -\inf\{f(x), 0\}.$$

Ιδιότητες του Ολοκληρώματος (7)



Σχήμα 2

Ιδιότητες του Ολοκληρώματος (8)

Επισημαίνουμε ότι η f^+ αλλά και η f^- είναι θετικές συναρτήσεις και ικανοποιούν

$$f = f^+ - f^- \text{ και } |f| = f^+ + f^-.$$

Λύνοντας, βρίσκουμε

$$f^+ = \frac{1}{2}\{|f| + f\} \text{ και } f^- = \frac{1}{2}\{|f| - f\}.$$

Οι ως άνω ιδιότητες του ολοκληρώματος μας δίνουν το

Πόρισμα 1: Αν η f είναι ολοκληρώσιμη επί του ορθογωνίου Π, τότε και οι συναρτήσεις f^+ και f^- είναι ολοκληρώσιμες.

Ιδιότητες του Ολοκληρώματος (9)

Παρατήρηση: Ένα από τα προβληματικά σημεία του ολοκληρώματος Riemann είναι το ακόλουθο. Αν η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη επί του ορθογωνίου Π, δεν ισχύει πάντα ότι η f είναι ολοκληρώσιμη. Το αντιπαράδειγμα είναι η συνάρτηση Dirichlet,

$$f(x,y)=\begin{cases}1 & \alpha\nu\ (x,y)\in\mathbb{Q}^2,\\ -1 & \alpha\nu\ (x,y)\notin\mathbb{Q}^2,\end{cases}$$

η οποία δεν είναι ολοκληρώσιμη, ενώ η $|f|$ είναι, αφού $|f(x,y)|=1$ για κάθε (x,y).

Τις αποδείξεις των παρακάτω ιδιοτήτων τις παραλείπουμε αφού δεν διαφέρουν από τις αντίστοιχες της διάστασης 1.

Ιδιότητες του Ολοκληρώματος (10)

Πρόταση 5 (Αλγεβρικές πράξεις)

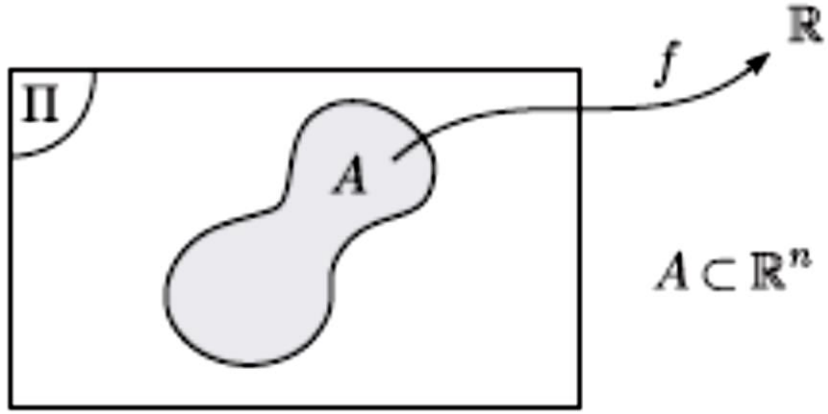
1. Αν οι f, g είναι ολοκληρώσιμες επί του Π, τότε και το γινόμενο fg είναι ολοκληρώσιμη.
2. Αν η f είναι ολοκληρώσιμη επί του Π και ικανοποιεί $f(x) \geq 0$, τότε και η $\sqrt{f}$ είναι ολοκληρώσιμη.
3. Αν η f είναι ολοκληρώσιμη επί του Π και ικανοποιεί $f(x) \neq 0$, τότε και η $1/f$ είναι ολοκληρώσιμη.

Πρόταση 6: Αν οι f, g είναι ολοκληρώσιμες επί του Π και $g \geq 0$, τότε υπάρχει $\mu \in [inf_{\Pi} g, sup_{\Pi} g]$ τ.ω.

$$\int_{\Pi} fg = \mu \int_{\Pi} f \,.$$

Ολοκλήρωση επί φραγμένων συνόλων (1)

Αν $A \subset \mathbb{R}^n$ είναι ένα φραγμένο σύνολο, τότε υπάρχει κάποιο ορθογώνιο Π τ.ω. $A \subset \Pi$ (Σχ. 3).



Σχήμα 3

Ολοκλήρωση επί φραγμένων συνόλων (2)

Ορισμός: Αν $f: A \to \mathbb{R}$, λέμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη επί του Α αν η $f 1_A$ είναι ολοκληρώσιμη επί του Π.

Προφανώς, οι ασυνέχειες της 1_A είναι ακριβώς το σύνορο ∂A του A. Έχουμε λοιπόν το ακόλουθο πόρισμα του θεωρήματος του Lebesgue.

Πόρισμα 2

1. Η 1_A είναι ολοκληρώσιμη ανν το σύνορο ∂A του A είναι μέτρου μηδέν.
2. Αν $A \subset \Pi$ και $f: \Pi \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη και επί του Α ανν το σύνορο ∂A του Α είναι μέτρου μηδέν.

Βιβλιογραφία

1. Γ. Γεωργανόπουλος, *Ολοκληρωτικός Λογισμός Πολλών Μεταβλητών*, Εκδόσεις Αδελφοί Κυριακίδη, Θεσσαλονίκη, 1995.
2. Τ. Χατζηαφράτης, *Απειροστικός Λογισμός σε Πολλές Μεταβλητές*, Αθήνα, 1996.
3. J. Marsden, A. Tromba, *Διανυσματικός Λογισμός*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 2000.
4. M. Spivac, *Λογισμός σε Πολλαπλότητες*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 1994.

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου

Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2014-2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης