



Λογισμός 4

Ενότητα 9: Παραδείγματα από άλλες αλλαγές.

Μιχ. Γ. Μαριάς
Τμήμα Μαθηματικών



Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Περιεχόμενα ενότητας

1. Παραδείγματα αλλαγής μεταβλητών.



Σκοποί ενότητας

Θα τελειώσουμε τα παραδείγματα δίνοντας δύο ολοκληρώματα όπου χρησιμοποιούνται αλλαγές διαφορετικές από τις τρεις κλασικές που αναφέραμε παραπάνω. Και στα δύο, στην επιλογή των συντεταγμένων παίζει σημαντικό ρόλο η γεωμετρία του χωρίου ολοκλήρωσης. Η πρώτη είναι μια παραλλαγή των πολικών.



Παράδειγμα αλλαγής μεταβλητών (1)

Παράδειγμα 1: Δείξτε ότι η

$$f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

είναι ολοκληρώσιμη επί του ελλειψοειδούς

$$D = \left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\},$$

και υπολογίστε το

$$I = \int_D f(x, y) dx dy.$$



Παράδειγμα αλλαγής μεταβλητών (2)

Λύση: Για την ολοκληρωσιμότητα, παρατηρούμε ότι η f είναι συνεχής και φραγμένη επί του D . Πράγματι, το πρόβλημα είναι μόνο στο 0, όπου έχουμε

$$|f(x, y)| = \frac{|xy|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{\sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sqrt{x^2 + y^2} \leq \varepsilon$$

για (x, y) κοντά στο 0.

Για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα, χρησιμοποιούμε τον μετασχηματισμό

$$x = a r \cos \theta, y = b r \sin \theta.$$

Αν $(x, y) \in D$,



Παράδειγμα αλλαγής μεταβλητών (3)

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &\leq 1 \Leftrightarrow \\ \frac{(ar\sigma\upsilon\nu\theta)^2}{a^2} + \frac{(br\eta\mu\theta)^2}{b^2} &\leq 1 \Leftrightarrow \\ r^2 &\leq 1.\end{aligned}$$

Έχουμε $r \leq 1$ και προφανώς $\theta \in (0, 2\pi)$.

Άρα

$$\begin{aligned}I &= \iint_D f(x, y) dx dy \\ &= \iint_{\substack{0 < r < 1, \\ 0 < \theta < 2\pi}} f(ar\sigma\upsilon\nu\theta, br\eta\mu\theta) ab r dr d\theta,\end{aligned}$$



Παράδειγμα αλλαγής μεταβλητών (4)

αφού η ορίζουσα του μετασχηματισμού είναι ίση με

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a \sigma \nu \theta & -a \eta \mu \theta \\ b \eta \mu \theta & b \rho \sigma \nu \theta \end{vmatrix} = a b r.$$

Άρα,

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\substack{0 < r < 1, \\ 0 < \theta < 2\pi}} \frac{\sigma \nu \theta \eta \mu \theta}{\sqrt{\alpha^2 r^2 \sigma \nu^2 \theta + b^2 r^2 \eta \mu^2 \theta}} a b r^2 dr d\theta \\ &= a b \iint_{\substack{0 < r < 1, \\ 0 < \theta < 2\pi}} \frac{\sigma \nu \theta \eta \mu \theta}{\sqrt{\alpha^2 \sigma \nu^2 \theta + b^2 \eta \mu^2 \theta}} r dr d\theta \end{aligned}$$



Παράδειγμα αλλαγής μεταβλητών (5)

$$\begin{aligned} &= ab \int_0^{2\pi} \frac{\text{συν}\theta\eta\mu\theta}{\sqrt{\alpha^2 \text{συν}^2\theta + b^2 \eta\mu^2\theta}} d\theta \\ &= ab \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\pi/2}^{\pi} + \dots \right\}. \end{aligned}$$

Θέτοντας $\eta\mu\theta = u$ και εν συνεχεία $v = u^2$, έχουμε π.χ. για το πρώτο ολοκλήρωμα:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{συν}\theta\eta\mu\theta}{\sqrt{\alpha^2 \text{συν}^2\theta + b^2 \eta\mu^2\theta}} d\theta =$$



Παράδειγμα αλλαγής μεταβλητών (6)

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 \frac{u}{\sqrt{\alpha^2(1-u)^2 + b^2u^2}} du \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dv}{\sqrt{\alpha^2(1-v) + b^2v}} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dv}{\sqrt{v(b^2 - a^2) + a^2}}. \end{aligned}$$

Θέτοντας $w = v(b^2 - a^2)$ και στην συνέχεια $\rho = w + a^2$,
έχουμε

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dv}{\sqrt{v(b^2 - a^2) + a^2}} = \frac{1}{2} \int_0^{b^2 - a^2} \frac{1}{\sqrt{w + a^2}} \frac{dw}{b^2 - a^2}$$



Παράδειγμα αλλαγής μεταβλητών (7)

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \int_{a^2}^{b^2} \frac{1}{\sqrt{\rho}} \frac{d\rho}{b^2 - a^2} \\ &= \frac{1}{2(b^2 - a^2)} \int_{a^2}^{b^2} \frac{d\rho}{\sqrt{\rho}} = 1. \end{aligned}$$

Τέλος, αναφέρουμε και μια «γραμμική» αλλαγή. Η χρήση τέτοιων συντεταγμένων εκτός εγχειριδίων είναι σπανιότατη.



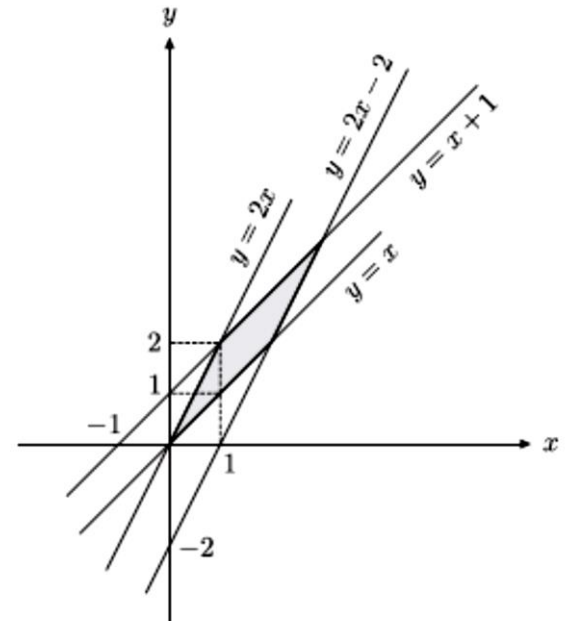
Παράδειγμα αλλαγής μεταβλητών (8)

Παράδειγμα 2: Έστω Π το παραλληλόγραμμο που ορίζεται από τις ευθείες $y = 2x$, $y = 2x - 2$, $y = x$, και $y = x + 1$ (Σχ.1). Με την αλλαγή μεταβλητών

$$u = y - x, v = y - 2x,$$

να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\iint_{\Pi} xy dx dy.$$



Σχήμα 1



Παράδειγμα αλλαγής μεταβλητών (9)

Λύση: Λύνοντας ως προς x και y , έχουμε τον μετασχηματισμό

$$T(u, v) = (x, y) = (u - v, 2u - v).$$

Άρα

$$|DT(u, v)| = \begin{vmatrix} \partial_u x & \partial_v x \\ \partial_u y & \partial_v y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1.$$

Ας προσδιορίσουμε τώρα το πεδίο που κινούνται τα u και v .

Παρατηρούμε ότι η ευθεία $y = 2x$ αντιστοιχεί στην ευθεία $v = 0$, ενώ η $y = x$ στην $u = 0$.

Αντίστοιχα οι ευθείες $y = 2x - 2$ και $y = x + 1$, στις $v = -2$ και $u = 1$.

Συνεπώς τα u, v περιέχονται στο ορθογώνιο



Παράδειγμα αλλαγής μεταβλητών (10)

$$\{0 < u < 1, -2 < v < 0\}$$

(κάντε το σχήμα). Άρα

$$\begin{aligned} I &= \int_{\Pi} xy dx dy = \int_0^1 du \int_{-2}^0 (u-v)(2u-v) |DT(u,v)| dv = \\ &= \int_0^1 du \int_{-2}^0 (2u^2 + v^2 - 3uv) dv \\ &= \int_0^1 \left[2u^2 v + \frac{u^3}{3} - \frac{3uv^2}{2} \right]_{-2}^0 du \\ &= \int_0^1 - \left(-4u^2 - \frac{8}{3} - 6u \right) du = \frac{4}{3} + \frac{8}{3} + 3 = \frac{20}{3} \end{aligned}$$



Βιβλιογραφία

1. Γ. Γεωργανόπουλος, *Ολοκληρωτικός Λογισμός Πολλών Μεταβλητών*, Εκδόσεις Αδελφοί Κυριακίδη, Θεσσαλονίκη, 1995.
2. Τ. Χατζηαφράτης, *Απειροστικός Λογισμός σε Πολλές Μεταβλητές*, Αθήνα, 1996.
3. J. Marsden, A. Tromba, *Διανυσματικός Λογισμός*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 2000.
4. Μ. Σρίνας, *Λογισμός σε Πολλαπλότητες*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 1994.



Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Μιχάλης Μαριάς.
«Λογισμός 4. Ενότητα 9: Αλλαγές μεταβλητών». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη
2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

<http://eclass.auth.gr/courses/OCRS437/>



Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά - Παρόμοια Διανομή [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>



Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.





Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου
Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2014-2015



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ