Λογισμός 4

Ενότητα 10: Διαιρέσεις της μονάδας και επέκταση του ολοκληρώματος.

Μιχ. Γ. Μαριάς
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα ενότητας

1. Διαιρέσεις της μονάδας.
2. Επέκταση του ολοκληρώματος.

Σκοποί ενότητας

Για την απόδειξη του θεωρήματος της αλλαγής των μεταβλητών, χρησιμοποιούμε τις διαιρέσεις της μονάδος που είναι ένα εργαλείο εξαιρετικά χρήσιμο σε όλη την Μαθηματική Ανάλυση.

Διαιρέσεις της μονάδας (1)

Ας είναι A ένα σύνολο του $\mathbb{R}^n$ και $A_j, j \in \mathbb{N}$ μια κάλυψη του A, δηλαδή $A \subset \bigcup_j A_j$. Υποθέτουμε ότι τα A_j δεν συναντιούνται πολύ, δηλαδή υπάρχει ένα Ν τέτοιο ώστε κάθε A_j τέμνει το πολύ Ν σύνολα της κάλυψης.

Η διαίρεση της μονάδας φ_j, που αντιστοιχεί στη κάλυψη A_j, δίνεται από τον τύπο:

$$\varphi_j(x) = \frac{1_{A_j}(x)}{\sum_{j\in\mathbb{N}} 1_{A_j}(x)}$$

Παρατηρούμε τα εξής:

Διαιρέσεις της μονάδας (2)

1. Επειδή τα σύνολα A_j δεν συναντιούνται πολύ, το τυχαίο $x \in A$ ανήκει πάντα σε πεπερασμένο πλήθος συνόλων A_j, και συνεπώς το άθροισμα
$$\sum_{j \in \mathbb{N}} 1_{A_j}(x)$$
έχει πάντα πεπερασμένο αριθμό όρων.
2. Από τον ορισμό έχουμε
$$0 \leq \varphi_j(x) \leq 1.$$

Διαιρέσεις της μονάδας (3)

3. Για κάθε $x \in A$,

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \varphi_j(x) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \frac{1_{A_j}(x)}{\sum_{j\in\mathbb{N}} 1_{A_j}(x)} = 1,$$

   εξ’ ου και ο όρος διαίρεση της μονάδας.

4. Για κάθε $x \notin A_j, \varphi_j(x) = 0$. λέμε ότι ο φορέας της φ_j είναι το A_j, και γράφουμε

$$supp\varphi_j = A_j.$$

Επέκταση του ολοκληρώματος (1)

Σε ότι μας αφορά, η ουσιαστική συνεισφορά της διαίρεσης της μονάδας είναι η ακόλουθη επέκταση της έννοιας του ολοκληρώματος.

Ορισμός 1: Ας είναι $A \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ φραγμένη. Λέμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη με την ευρεία έννοια, αν

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} \int_A \varphi_j |f| < \infty, \qquad (1)$$

όπου φ_j είναι μια διαίρεση της μονάδας που αντιστοιχεί στην κάλυψη A_j του A.

Επέκταση του ολοκληρώματος (2)

Από την (1) συνάγεται ότι

$$\sum_{j\in\mathbb{N}}\left|\int_A \varphi_j f\right| < \infty.$$

Συνεπώς η σειρά

$$\sum_{j\in\mathbb{N}}\int_A \varphi_j f$$

συγκλίνει απολύτως.

Επέκταση του ολοκληρώματος (3)

Ορισμός 2: Θέτουμε

$$\int_A f = \sum_{j\in\mathbb{N}} \int_A \varphi_j f \,. \qquad (2)$$

Το $\int_A f$ το λέμε ολοκλήρωμα της f υπό την ευρεία έννοια.

Για να έχει έννοια ο ορισμός του $\int_A f$ στην (2) πρέπει:

1. Να είναι ανεξάρτητος της διαίρεσης της μονάδας φ_j, και
2. Αν το Α είναι φραγμένο, να συμπίπτει με το ολοκλήρωμα Riemann που ήδη ξέρουμε.

Αυτό είναι το περιεχόμενο του επόμενου θεωρήματος.

Επέκταση του ολοκληρώματος (4)

Θεώρημα: Αν η $A \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη με την ευρεία έννοια, τότε:

1. Αν η ψ_j είναι διαίρεση της μονάδας, που αντιστοιχεί στην κάλυψη B_j του Α, η σειρά

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} \int_A \psi_j f$$

συγκλίνει απολύτως και

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} \int_A \psi_j f = \sum_{j \in \mathbb{N}} \int_A \varphi_j f = \int_A f .$$

2. Αν το A είναι φραγμένο, τότε το ολοκλήρωμα με την ευρεία έννοια συμπίπτει με το ολοκλήρωμα Riemann.

Επέκταση του ολοκληρώματος (5)

Απόδειξη: 1. Αφού η f είναι ολοκληρώσιμη υπό την ευρεία έννοια και

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \int_A \psi_j(x) = 1, \forall x \in A,$$

έχουμε

$$\infty > \sum_{j\in\mathbb{N}} \int_A \varphi_j |f| = \sum_{j\in\mathbb{N}} \int_A \left(\sum_{i\in\mathbb{N}} \psi_i\right) \varphi_j |f|$$

$$= \sum_{j\in\mathbb{N}} \int_{A_j} \left(\sum_{i\in\mathbb{N}} \psi_i\right) \varphi_j |f| = \sum_{j\in\mathbb{N}} \int_{A_j} \left(\sum_{1\leq k\leq N} \psi_{i_k}\right) \varphi_j |f|, \qquad (3)$$

Επέκταση του ολοκληρώματος (6)

αφού $supp\psi_i = B_i$, $supp\varphi_j = A_j$ και το πλήθος των B_i που τέμνουν το A_j είναι πεπερασμένο. Άρα από την γραμμικότητα έχουμε

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \int_{A_j} \left(\sum_{1\le k\le N} \psi_{i_k} \right) \varphi_j |f|$$

$$= \sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{1\le k\le N} \int_{A_j} \psi_{i_k}\varphi_j |f|$$

$$= \sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{i\in\mathbb{N}} \int_{A} \psi_i\varphi_j |f|. \quad (4)$$

Επέκταση του ολοκληρώματος (7)

Από τις (3) και (4) έχουμε

$$\sum_{j\in\mathbb{N}}\sum_{i\in\mathbb{N}}\int_A \psi_i\varphi_j|f| = \sum_{j\in\mathbb{N}}\int_A \varphi_j|f| < \infty,$$

δηλαδή η σειρά

$$\sum_{j\in\mathbb{N}}\sum_{i\in\mathbb{N}}\int_A \psi_i\varphi_j f$$

συγκλίνει απολύτως.

Έτσι λοιπόν

Επέκταση του ολοκληρώματος (8)

$$= \sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{i\in\mathbb{N}} \int_A \psi_i \varphi_j f$$

$$= \sum_{j\in\mathbb{N}} \int_A \left(\sum_{i\in\mathbb{N}} \psi_i \right) \varphi_j f$$

$$= \sum_{j\in\mathbb{N}} \int_A \varphi_j f$$

$$= \int_A f \,,$$

αφού η απόλυτη σύγκλιση δικαιολογεί την εναλλαγή της σειράς στην άθροιση.

Επέκταση του ολοκληρώματος (9)

Συνάγεται λοιπόν ότι

$$
\begin{aligned}
\int_A f &= \sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{i\in\mathbb{N}} \int_A \psi_i \varphi_j f \\
&= \sum_{i\in\mathbb{N}} \sum_{j\in\mathbb{N}} \int_A \psi_i \varphi_j f \\
&= \sum_{i\in\mathbb{N}} \sum_{j\in\mathbb{N}} \int_{B_i} \psi_i \varphi_j f \\
&= \sum_{i\in\mathbb{N}} \sum_{1\leq k\leq N'} \int_{B_i} \psi_i \varphi_{j_k} f\,,
\end{aligned}
$$

αφού πεπερασμένο πλήθος B_i τέμνουν το A_j.

Επέκταση του ολοκληρώματος (10)

Έτσι

$$\int_A f = \sum_{i\in\mathbb{N}} \int_{B_i} \psi_i \Big(\sum_{1\le k\le N'} \varphi_{j_k}\Big) f \quad \text{(γραμμικότητα)}$$

$$= \sum_{i\in\mathbb{N}} \int_{B_i} \psi_i f \,,$$

και η απόδειξη του πρώτου μέρους είναι πλήρης.

2. Αφού το A είναι φραγμένο, περιέχεται σε ένα ορθογώνιο Π και το Π, ως συμπαγές, καλύπτεται από πεπερασμένο πλήθος μπαλών $B(x_j, \varepsilon), j \le N$.

Αν φ_j είναι η διαίρεση της μονάδας που αντιστοιχεί στις ως

Επέκταση του ολοκληρώματος (11)

άνω μπάλες, τότε το ολοκλήρωμα Riemann της f επί του A γράφεται ως εξής

$$\int_A f = \int_A \left(\sum_{j \leq \mathbb{N}} \varphi_j\right) f = \sum_{j \leq \mathbb{N}} \int_A \varphi_j f\,,$$

δηλαδή το ολοκλήρωμα $\int_A f$ υπό την ευρεία έννοια.

Βιβλιογραφία

1. Γ. Γεωργανόπουλος, *Ολοκληρωτικός Λογισμός Πολλών Μεταβλητών*, Εκδόσεις Αδελφοί Κυριακίδη, Θεσσαλονίκη, 1995.
2. Τ. Χατζηαφράτης, *Απειροστικός Λογισμός σε Πολλές Μεταβλητές*, Αθήνα, 1996.
3. J. Marsden, A. Tromba, *Διανυσματικός Λογισμός*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 2000.
4. M. Spivac, *Λογισμός σε Πολλαπλότητες*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 1994.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Μιχάλης Μαριάς. «Λογισμός 4. Ενότητα 10: Διαιρέσεις της μονάδας και επέκταση του ολοκληρώματος». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

http://eclass.auth.gr/courses/OCRS437/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου
Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2014-2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης