ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Λογισμός 4

Ενότητα 12: Μη γνήσια ολοκληρώματα.

Μιχ. Γ. Μαριάς
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα ενότητας

1. Ορισμός του μη γνήσιου ολοκληρώματος.
2. Εφαρμογές του μη γνήσιου ολοκληρώματος.

Σκοποί ενότητας

Ορίζονται τα μη γνήσια ολοκληρώματα και δίνονται εφαρμογές τους.

Μη γνήσια ολοκληρώματα (1)

Μέχρι τώρα μελετήσαμε τα πολλαπλά ολοκληρώματα

$$\int_A f(x)dx\,,$$

όπου,

- η f είναι ολοκληρώσιμη (άρα και φραγμένη), και
- το A είναι φραγμένο με σύνορο μέτρου 0.

Τώρα, θα μελετήσουμε ολοκληρώματα θετικών συναρτήσεων ($f \geq 0$)

$$\int_A f(x)dx\,,$$

όπου:

Μη γνήσια ολοκληρώματα (2)

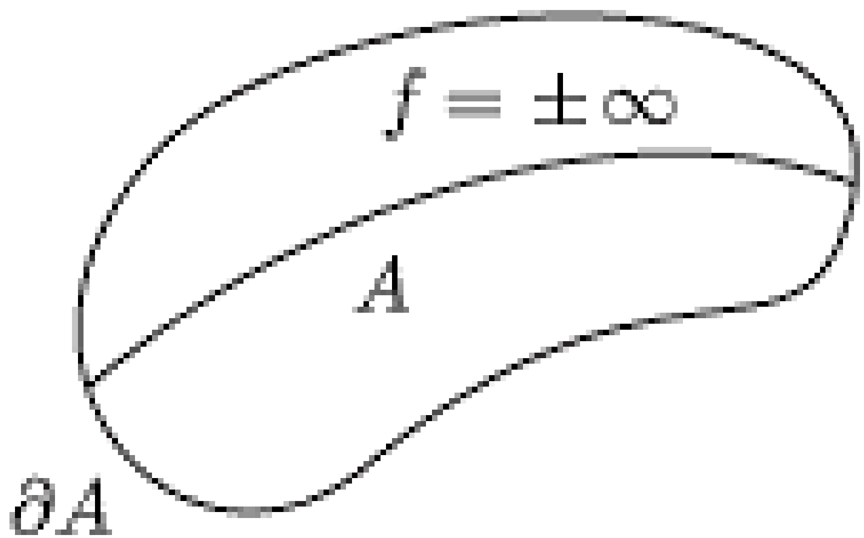
(α) Η f είναι ολοκληρώσιμη επί του φραγμένου A, εκτός ίσως από ένα υποσύνολο μηδενικού μέτρου, πάνω στο οποίο η f απειρίζεται (Σχ.1).

(β) Η f είναι φραγμένη επί του μη φραγμένου A και ολοκληρώσιμη πάνω σε όλα τα καλά και φραγμένα υποσύνολα του A.

(γ) Συνδυασμός των (α) και (β).

Τα ολοκληρώματα αυτά λέγονται μη γνήσια.

Μη γνήσια ολοκληρώματα (3)



Σχήμα 1

Μη γνήσια ολοκληρώματα (4)

Για τον ορισμό, αλλά και τον υπολογισμό ενός μη γνήσιου ολοκληρώματος, παίρνουμε μια αύξουσα ακολουθία A_n υποσυνόλων του Α με σύνορο μέτρου 0 και τ.ω.

$A_n \nearrow$ στο Α καθώς το $n \to \infty$, και

επί των A_n η f να είναι ολοκληρώσιμη.

Η $1_{A_n} f$ είναι ολοκληρώσιμη και ορίζουμε το μη γνήσιο ολοκλήρωμα ως εξης:

$$\int_A f := \lim_{n\to\infty} \int_{A_n} f = \lim_{n\to\infty} \int_A 1_{A_n} f \,.$$

Επισημαίνουμε ότι το ως άνω όριο πάντα υπάρχει ή είναι $+\infty$, αφού πρόκειται για όριο θετικής και αύξουσας ακολουθίας.

Μη γνήσια ολοκληρώματα (5)

Παράδειγμα 1: Να υπολογιστεί το μη γνήσιο ολοκλήρωμα

$$J = \int_{[0,1]^2} \frac{y^2}{x^{2/3}} dxdy.$$

Λύση: Η $\frac{y^2}{x^{2/3}}$ απειρίζεται επί της ευθείας $x = 0$. Θέτουμε λοιπόν

$$A_n = \left\{\frac{1}{n} \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\right\}.$$

Έχουμε $A_n \nearrow A$, και επί των A_n, η $\frac{y^2}{x^{2/3}}$ είναι φραγμένη. Άρα

$$J_n = \int_{A_n} \frac{y^2}{x^{2/3}} dxdy = \int_{\frac{1}{n}}^{1} x^{-2/3} dx \int_0^1 y^2 dy = \frac{1}{3}\left[3x^{1/3}\right]_{1/n}^{1} = 1 - \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{3}} \to 1.$$

Μη γνήσια ολοκληρώματα (6)

Παράδειγμα 2: (Ένα ολοκλήρωμα που απειρίζεται) Να υπολογιστεί το μη γνήσιο ολοκλήρωμα

$$J = \int_{[0,1]^2} \frac{|x^2 - y^2|}{(x^2 + y^2)^2} dxdy.$$

Λύση: Θέτουμε

$$A_n = \left\{\frac{1}{n} \leq x \leq 1, \frac{1}{n} \leq y \leq 1\right\}.$$

Η διαγώνιος χωρίζει το A_n σε δύο κομμάτια: το A_n^1 που είναι κάτω από την διαγώνιο όπου $x \geq y$, και το A_n^2 που είναι από πάνω και $x \leq y$. Έχουμε

Μη γνήσια ολοκληρώματα (7)

$$J_n = \int_{A_n} \frac{|x^2 - y^2|}{(x^2 + y^2)^2} dxdy$$

$$= \int_{A_n^1} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dxdy + \int_{A_n^2} \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} dxdy$$

$$= \int_{\frac{1}{n}}^{1} dx \int_{\frac{1}{n}}^{x} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy + \int_{\frac{1}{n}}^{1} dy \int_{\frac{1}{n}}^{y} \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} dx$$

$$= 2 \int_{\frac{1}{n}}^{1} dx \int_{\frac{1}{n}}^{x} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy \,,$$

αφού οι ρόλοι των x, y στα ως άνω ολοκληρώματα είναι τελείως συμμετρικοί.

Μη γνήσια ολοκληρώματα (8)

Παρατηρούμε ότι

$$\partial_y \frac{y}{x^2+y^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

και συνεπώς

$$\int_{\frac{1}{n}}^{1} dx \int_{\frac{1}{n}}^{x} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\, dy$$

$$= \int_{\frac{1}{n}}^{1} dx \int_{\frac{1}{n}}^{x} \partial_y \frac{y}{x^2+y^2}\, dy$$

$$= \int_{\frac{1}{n}}^{1} \left[\frac{y}{x^2+y^2}\right]_{y=\frac{1}{n}}^{y=x} dx$$

Μη γνήσια ολοκληρώματα (9)

$$= \int_{1/n}^{1} \frac{x}{2x^2}\,dx - \frac{1}{n}\int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{1}{x^2+\frac{1}{n^2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(log 1 - \log\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{1}{x^2+\frac{1}{n^2}}\,dx \xrightarrow{n\to\infty} +\infty - 0.$$

Μη γνήσια ολοκληρώματα (10)

Παράδειγμα 3: (Ένα ολοκλήρωμα που απειρίζεται) Να υπολογιστεί το μη γνήσιο ολοκλήρωμα

$$\iint_A \frac{1}{x-y}\,dxdy\,,$$

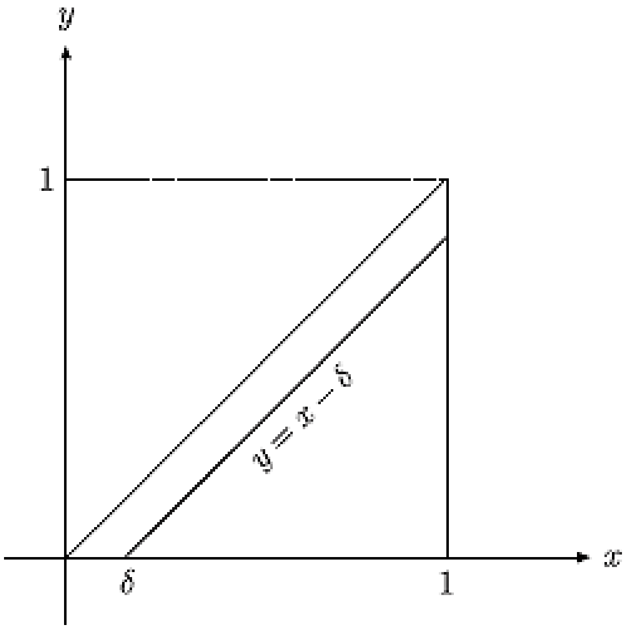
όπου

$$A = \{0 \le x \le 1, 0 \le y \le x\}$$

Λύση: Θέτουμε (Σχήμα 2)

$$A_\delta = \{\delta \le x \le 1, 0 \le y \le 1-\delta\}.$$

Μη γνήσια ολοκληρώματα (11)



Σχήμα 2

Μη γνήσια ολοκληρώματα (12)

Οπότε,

$$\iint_{A_\delta} \frac{1}{x-y} dxdy = \int_\delta^1 dx \int_0^{x-\delta} \frac{1}{x-y} dy$$

$$= \int_\delta^1 -[log(x-y)]_{y=0}^{y=x-\delta} dx$$

$$= \int_\delta^1 (-log\delta + logx) dx$$

$$= -(1-\delta)log\delta + \int_\delta^1 logx dx$$

$$= \delta - 1 - log\delta \to +\infty,$$

καθώς το $\delta \to 0$.

Μη γνήσια ολοκληρώματα (13)

Παρατήρηση: Αν η $f : A \to \mathbb{R}$ δεν είναι πλέον θετική, το μη γνήσιο ολοκλήρωμα

$$\int_A f(x)dx$$

μπορεί να οριστεί στην περίπτωση που το μη γνήσιο ολοκλήρωμα

$$\int_A |f(x)|dx$$

υπάρχει. Το ορίζουμε ως την διαφορά

$$\int_A f(x)dx = \int_A f^+(x)dx - \int_A f^-(x)dx < +\infty,$$

Μη γνήσια ολοκληρώματα (14)

αφού οι f^+, f^- είναι θετικές, $f = f^+ + f^-$ και επιπλέον τα

$$\int_A f^+(x)dx\,, \qquad \int_A f^-(x)dx$$

είναι μικρότερα ή ίσα του

$$\int_A |f(x)|dx < \infty.$$

Παράδειγμα 4: Δείξτε ότι το μη γνήσιο ολοκλήρωμα

$$\int_{[0,1]^2} \frac{\sigma\upsilon\nu(x+y)}{(1+x^2)\sqrt{y}}\,dxdy$$

υπάρχει.

Μη γνήσια ολοκληρώματα (15)

Λύση: Έχουμε να δούμε αν

$$\int_{[0,1]^2} \left| \frac{\sigma\upsilon\nu(x+y)}{(1+x^2)\sqrt{y}} \right| dxdy = \int_{[0,1]^2} \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{y}} dxdy < \infty.$$

Η ανωμαλία εντοπίζεται στην ευθεία $y = 0$, την οποία και απομονώνουμε εξετάζοντας το ολοκλήρωμα:

$$\int_{\substack{0\le x\le 1 \\ \frac{1}{n}\le y\le 1}} \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{y}} dxdy = \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)} dx \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{dy}{\sqrt{y}}$$

$$= [\tau o\xi\varepsilon\varphi x]_0^1 \times 2[\sqrt{y}]_{\frac{1}{n}}^1$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\nu}}\right) \xrightarrow{n\to\infty} \frac{\pi}{2}\ .$$

Βιβλιογραφία

1. Γ. Γεωργανόπουλος, *Ολοκληρωτικός Λογισμός Πολλών Μεταβλητών*, Εκδόσεις Αδελφοί Κυριακίδη, Θεσσαλονίκη, 1995.
2. Τ. Χατζηαφράτης, *Απειροστικός Λογισμός σε Πολλές Μεταβλητές*, Αθήνα, 1996.
3. J. Marsden, A. Tromba, *Διανυσματικός Λογισμός*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 2000.
4. M. Spivac, *Λογισμός σε Πολλαπλότητες*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 1994.

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου
Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2014-2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης