ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Λογισμός 4

Ενότητα 17: Το επί-επιφάνειο ολοκλήρωμα διανυσματικών πεδίων.

Μιχ. Γ. Μαριάς
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα ενότητας

1. Το επι-επιφάνειο ολοκλήρωμα διανυσματικών πεδίων.

Σκοποί ενότητας

Στην ενότητα αυτή ορίζεται το επί-επιφάνειο ολοκλήρωμα διανυσματικών πεδίων και παρουσιάζεται ο νόμος του Gauss για ηλεκτρικά πεδία.

Επι-επιφάνειο ολοκλήρωμα (1)

Αν η S είναι μία λεία προσανατολισμένη επιφάνεια και $\Phi\colon A \to \mathbb{R}^3$ μια παραμετρικοποίηση της S, τότε για κάθε C^1 διανυσματικό πεδίο F ορισμένο στην S, το **επι-επιφάνειο ολοκλήρωμα** του F επί της S ορίζεται ως εξής:

$$\int_S F = \int_A \langle F(\Phi(u,v)), T_u \times T_v \rangle du dv \,.$$

Πράγματι, αν έχουμε μια κάλυψη του A με μικρά ορθογώνια $\Pi_i = \Delta u_i \Delta v_i$, οι εικόνες του $\Phi(\Pi_i)$ καλύπτουν την επιφάνεια S, και επομένως

$$\int_S F \sim \sum_i \langle F, \Phi(\Pi_i) \rangle = \sum_i \langle F, T_{u_i} \Delta u_i \times T_{v_i} \Delta v_i \rangle =$$

Επι-επιφάνειο ολοκλήρωμα (2)

$$\sum_i \langle F, T_{u_i} \times T_{v_i} \rangle \Delta u_i \Delta v_i = \sum_i \langle F, T_{u_i} \times T_{v_i} \rangle |\varPi_\iota|$$

$$\to \int_A \langle F, T_u \times T_v \rangle du dv \,.$$

Ας είναι π.χ. S η μοναδιαία σφαίρα με την παραμετρικοποίηση

$$x = \sigma\upsilon\nu\theta\eta\mu\varphi, \qquad y = \eta\mu\theta\eta\mu\varphi, \qquad z = \sigma\upsilon\nu\varphi,$$

και

$$r = xi + yj + zk$$

το διάνυσμα θέσης.

Επι-επιφάνειο ολοκλήρωμα (3)

Έχουμε ήδη δεί ότι

$$\langle r, T_\theta \times T_\varphi \rangle = -\eta\mu\varphi.$$

Άρα

$$\int_S r = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \langle r, T_\theta \times T_\varphi \rangle d\theta d\varphi = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} -\eta\mu\varphi d\theta d\varphi = -4\pi.$$

Ας δούμε όμως τι αντιπροσωπεύει στην Φυσική το ως άνω ολοκλήρωμα.

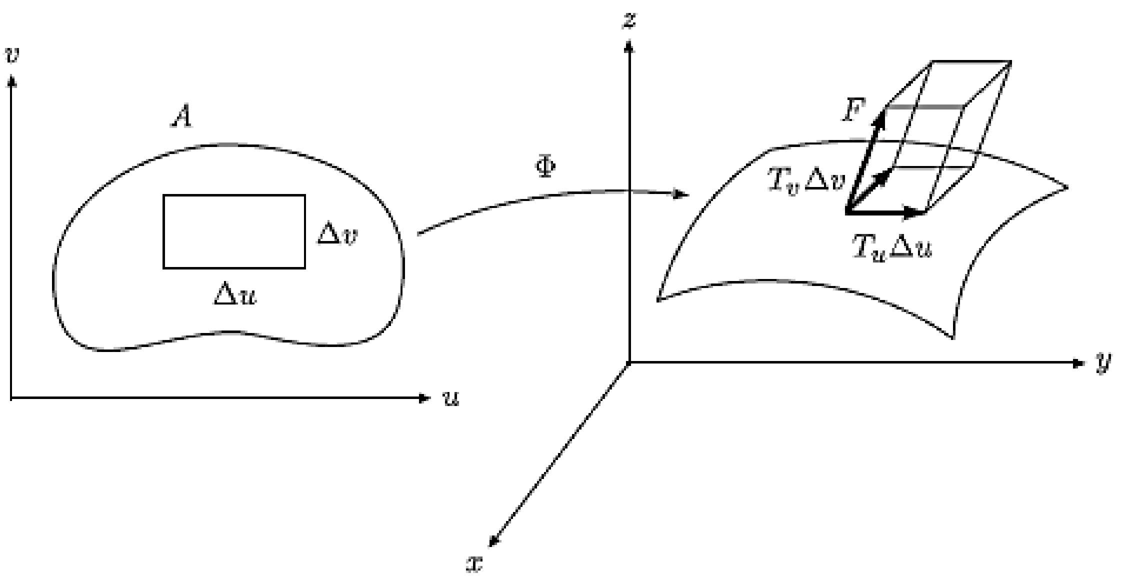
Επι-επιφάνειο ολοκλήρωμα (4)

Παράδειγμα 1: (ροή υγρών) Αν υποθέσουμε ότι το F είναι το πεδίο ταχυτήτων ενός ρευστού, τότε το F δείχνει την κατεύθυνση που ακολουθεί το ρευστό όταν διασχίζει την επιφάνεια (δες Σχ.1). Επιπλέον, ο αριθμός

$$\left|\langle F, T_{u_i}\Delta u_i \times T_{v_i}\Delta v_i\rangle\right|$$

είναι ο όγκος του παραλληλεπιπέδου που σχηματίζουν τα διανύσματα $F, T_{u_i}\Delta u_i$ και $T_{v_i}\Delta v_i$, δηλαδή ο όγκος του ρευστού που περνάει το εφαπτόμενο παραλληλόγραμμο $T_{u_i}\Delta u_i \times T_{v_i}\Delta v_i$στη μονάδα του χρόνου (Σχ.1)

Επι-επιφάνειο ολοκλήρωμα (5)



Σχήμα 1

Επι-επιφάνειο ολοκλήρωμα (6)

Συνεπώς,

$$\sum_{\iota} \langle F, T_{u_i} \Delta u_i \times T_{v_i} \Delta v_i \rangle \to \int_S F$$

είναι η ποσότητα του ρευστού που περνάει από την επιφάνεια στη μονάδα του χρόνου, δηλαδή η ροή του ρευστού δια μέσου της επιφάνειας.

Ο νόμος του Gauss για ηλεκτρικά πεδία (1)

Παράδειγμα 2: (νόμος Gauss, Coulomb) Ο νόμος του Gauss λέει ότι η ροή του ηλεκτρικού πεδίου $\vec{E}$ δια μέσου μιας κλειστής επιφάνειας S, π.χ. μιας σφαίρας ή ενός ελλειψοειδούς (Σχ.2), είναι ίση με το φορτίο Q που περικλείεται μέσα στην επιφάνεια, δηλαδή

$$\int_S \vec{E} = Q.$$

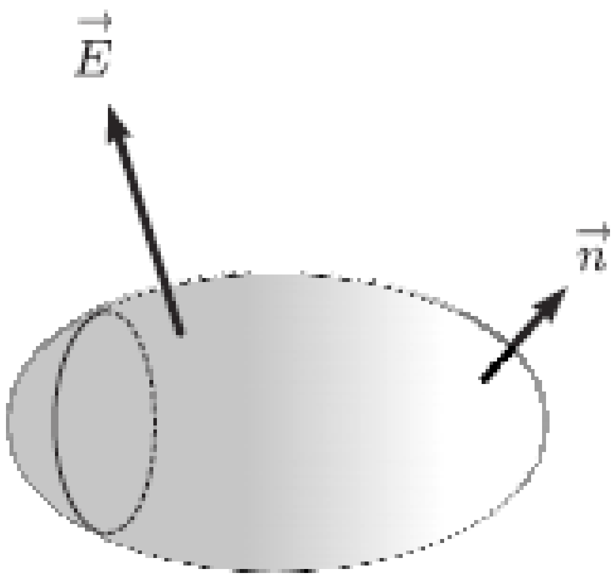
Έστω $\Phi: A \to \mathbb{R}^3$ μια παραμετρικοποίηση της S. Αν τώρα

$$\vec{E} = E\vec{n},$$

όπου

$$\vec{n} = \frac{T_u \times T_v}{\|T_u \times T_v\|}$$

Ο νόμος του Gauss για ηλεκτρικά πεδία (2)



Σχήμα 2

Ο νόμος του Gauss για ηλεκτρικά πεδία (3)

είναι η εξωτερική κάθετος της S, τότε

$$Q = \int_S \vec{E} = \int_A E\langle \vec{n}, T_u \times T_v\rangle dudv$$

$$= E\int_A \langle \frac{T_u \times T_v}{\|T_u \times T_v\|}, T_u \times T_v\rangle\, dudv$$

$$= E\int_A \frac{\|T_u \times T_v\|^2}{\|T_u \times T_v\|} dudv$$

$$= E\int_A \|T_u \times T_v\|^2\, dudv$$

$$= E|A|.$$

Ο νόμος του Gauss για ηλεκτρικά πεδία (4)

Αν υποθέσουμε ότι $S = S_2(P, r)$, τότε

$$Q = E4\pi r^2 \Rightarrow E = \frac{Q}{4\pi r^2}.$$

Αν τώρα υποθέσουμε ότι το πεδίο $\vec{E}$ παράγεται από ένα μεμονωμένο φορτίο Q, τότε λόγω συμμετρίας,

$$\vec{E} = E\vec{n},$$

όπου

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}}{\|r\|}$$

είναι η εξωτερική κάθετος σε οποιαδήποτε σφαίρα με κέντρο το Q.

Ο νόμος του Gauss για ηλεκτρικά πεδία (5)

Αν Q_0 είναι ένα άλλο φορτίο σε απόσταση r από το Q, τότε η δύναμη $\vec{F}$ που ασκείται πάνω στο Q_0 από το Q δίνεται από τον τύπο

$$\vec{F} = \vec{E}Q_0 = \frac{QQ_0}{4\pi r^2}\vec{n}, (1)$$

αφού από τον νόμο του Gauss,

$$E = \frac{Q}{4\pi r^2}.$$

Η σχέση (1) είναι ο νόμος του Coulomb.

Βιβλιογραφία

1. Γ. Γεωργανόπουλος, *Ολοκληρωτικός Λογισμός Πολλών Μεταβλητών*, Εκδόσεις Αδελφοί Κυριακίδη, Θεσσαλονίκη, 1995.
2. Τ. Χατζηαφράτης, *Απειροστικός Λογισμός σε Πολλές Μεταβλητές*, Αθήνα, 1996.
3. J. Marsden, A. Tromba, *Διανυσματικός Λογισμός*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 2000.
4. M. Spivac, *Λογισμός σε Πολλαπλότητες*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 1994.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Μιχάλης Μαριάς. «Λογισμός 4. Ενότητα 17: Το επί-επιφάνειο ολοκλήρωμα διανυσματικών πεδίων». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

http://eclass.auth.gr/courses/OCRS437/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου
Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2014-2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης