ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Λογισμός 4

Ενότητα 19: Το Θεώρημα του Gauss.

Μιχ. Γ. Μαριάς
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα ενότητας

1. Θεώρημα του Gauss.
2. Ο νόμος του Gauss.

Σκοποί ενότητας

Στην ενότητα αυτή αποδεικνύεται το θεώρημα του Gauss που έχει πολλές εφαρμογές στην Φυσική.

Το θεώρημα του Gauss (1)

Το θεώρημα του Gauss μας λέει ότι η ροή προς τα έξω ενός διανυσματικού πεδίου F μέσω μιας κλειστής επιφάνειας $\partial\Omega$, είναι ίση με το ολοκλήρωμα της απόκλισης του F επι του χωρίου Ω που περικλείει η $\partial\Omega$, δηλαδή

Θεώρημα (Gauss) Αν Ω είναι ένα καλό χωρίο του $\mathbb{R}^3$ με σύνορο $\partial\Omega$, που είναι κλειστή και προσανατολισμένη επιφάνεια, και F είναι ένα C^1 πεδίο τότε

$$\int_{\partial\Omega} \langle F, n \rangle dS = \int_{\Omega} divF \,. \quad (1)$$

Το θεώρημα του Gauss (2)

Παρατήρηση 1: Το Θεώρημα του Gauss είναι η γενίκευση του Green στις 3 διαστάσεις. Θυμίζουμε ότι η διανυσματική μορφή του Green στο επίπεδο είναι η

$$\int_{\partial A} \langle F, n \rangle = \int_{A} \; divF \, ,$$

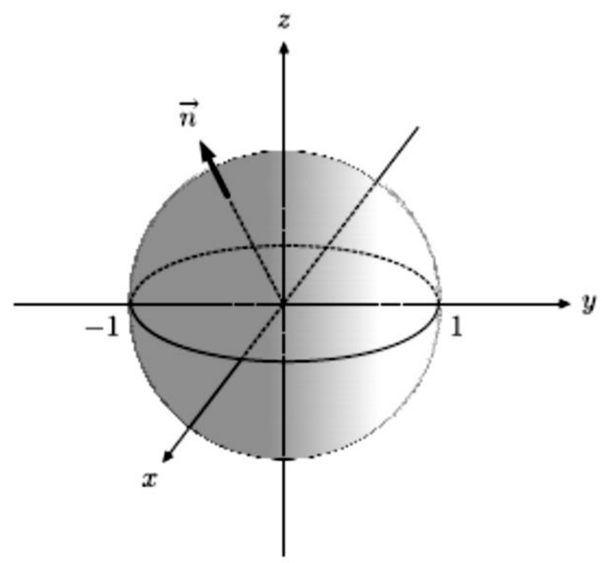
δηλαδή ακριβώς η (1).

Η απόδειξη του θεωρήματος του Gauss είναι πανομοιότυπη με αυτήν του Green και για αυτό παραπέμπουμε σε κάποιο από τα εγχειρίδια.

Δίνουμε δύο παραδείγματα εφαρμογής του θεωρήματος.

Το θεώρημα του Gauss (3)

Παράδειγμα 1: Αν $F = 2xi + y^2j + z^2k$ και S είναι η σφαίρα $S_2(0,1)$ προσανατολισμένη από τα μέσα προς τα έξω (Σχ.1), υπολογίστε το $\int_S \langle F, n\rangle$.



Σχήμα 1

Το θεώρημα του Gauss (4)

Λύση: Από τον Gauss έχουμε

$$\int_S \langle F, n\rangle dS = \int_{B(0,1)} divF = \int_{B(0,1)} (2 + 2y + 2z)dxdydz$$

$$= 2\int_{B(0,1)} dxdydz + 2\int_{B(0,1)} ydxdydz + 2\int_{B(0,1)} zdxdydz$$

$$= 2|B(0,1)| + 0 + 0.$$

Πράγματι, με σφαιρικές

$$\int_{B(0,1)} ydxdydz = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1 r\eta\mu\varphi\eta\mu\theta\eta\mu\varphi r^2 drd\varphi d\theta = 0,$$

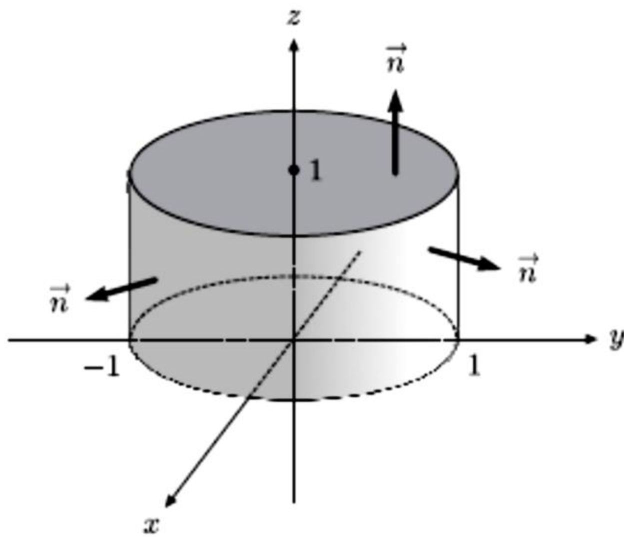
αφού $\int_0^{2\pi} \eta\mu\theta d\theta = 0$.

Το θεώρημα του Gauss (5)

Παράδειγμα 2: Αν S είναι ο κύλινδρος του σχήματος 2 και

$$F = xy^2 i + x^2 y j + y k,$$

υπολογίστε το $\iint_S \ F$.



Σχήμα 2

Το θεώρημα του Gauss (6)

Λύση: Όπως παρατηρούμε, είναι μάλλον επίπονο να υπολογίσουμε το επι-επιφάνειο ολοκλήρωμα, αφού η εξωτερική κάθετος αλλάζει στις βάσεις και στην κυρτή επιφάνεια. Ο Gauss απλουστεύει τα πράγματα. Αν C είναι το εσωτερικό του κυλίνδρου, τότε

$$\int_S \langle F, n \rangle dS = \int_C divF = \int_C (y^2 + x^2) dxdydz$$

$$= \int_{-1}^{1} dz \int_{x^2+y^2 \leq 1} (y^2 + x^2) dxdy$$

$$= \int_{-1}^{1} dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^2 r dr = \pi.$$

Το θεώρημα του Gauss (7)

Παράδειγμα 3: Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα της
$$f(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2$$
επί της μοναδιαίας σφαίρας $S_2(0,1)$.

Λύση: Για να εφαρμόσουμε το θεώρημα του Gauss στο επικαμπύλιο

$$\int_{S_2(0,1)} f\ ,$$

πρέπει να το γράψουμε ως

$$\int_{S_2(0,1)} \langle F, n \rangle\ ,$$

Το θεώρημα του Gauss (8)

όπου $n = xi + yj + zk$ είναι η μοναδιαία κάθετος της σφαίρας. Αν

$$F = axi + byj + czk,$$

τότε

$$\langle F, n \rangle = ax^2 + by^2 + cz^2,$$

και έχουμε

$$\int_{S_2(0,1)} f = \int_{S_2(0,1)} \langle F, n \rangle = \int_{B(0,1)} divF$$

$$= \int_{B(0,1)} (a + b + c) dxdydz$$

$$= (a + b + c)|B(0,1)|$$

Το θεώρημα του Gauss (9)

Παρατήρηση 2 (Η φυσική σημασία της απόκλισης): Αν υποθέσουμε ότι το πεδίο F είναι πεδίο ταχυτήτων ενός ρευστού, τότε το ολοκλήρωμα

$$\int_{\partial B(P_0,r)} \langle F, n \rangle dS$$

είναι ίσο με τη ροή προς τα έξω του πεδίου F από την σφαίρα $\partial B(P_0, r)$. Όμως από τον Gauss και το θεώρημα μέσης τιμής, έχουμε

$$\int_{\partial B(P_0,r)} \langle F, n \rangle dS = \int_{B(P_0,r)} divF(x, y, z) dxdydz$$

$$= divF(P^*) \int_{B(P_0,r)} dxdydz$$

Το θεώρημα του Gauss (10)

$$= divF(P^*)|B(P_0, r)|.$$

για κάποιο $P^* \in B(P_0, r)$. Άρα

$$divF(P^*) = \frac{1}{|B(P_0, r)|} \int_{\partial B(P_0, r)} \langle F, n \rangle dS\,.$$

Παίρνοντας το όριο καθώς το $r \to 0$, έχουμε

$$divF(P_0) = \lim_{r \to 0} divF(P) = \lim_{r \to 0} \frac{1}{|B(P_0, r)|} \int_{\partial B(P_0, r)} \langle F, n \rangle dS\,,$$

που είναι η ροή προς τα έξω του πεδίου F ανά μονάδα όγκου.

Ο νόμος του Gauss (1)

Ο νόμος του Gauss δίνει την ροή του ηλεκτρικού πεδίου

$$E = -\frac{Q}{4\pi}\frac{\vec{r}}{r^3}$$

που παράγει ένα σημειακό φορτίο Q διαμέσου μιας κλειστής επιφάνειας $\partial\Omega$. Πιο συγκεκριμένα, ο νόμος του Gauss μας λέει ότι η συνολική ηλεκτρική ροή

$$\iint_{\partial\Omega} E$$

ισούται με Q αν το φορτίο βρίσκεται μέσα στο Ω, και με 0 αν είναι έξω.

Π.χ. αν το Q είναι τοποθετημένο στην αρχή των αξόνων και

Ο νόμος του Gauss (2)

$0 \in \Omega$, τότε

$$\iint_{\partial\Omega} E = \iint_{\partial\Omega} \langle E, n \rangle = -\iint_{\partial\Omega} \frac{Q}{4\pi r^3} \langle \vec{r}, n \rangle = \begin{cases} Q, & \alpha\nu\ 0 \in \Omega, \\ 0, & \alpha\nu\ 0 \notin \Omega. \end{cases}$$

Η απόδειξη του νόμου του Gauss είναι ενδιαφέρουσα αφού μας μαθαίνει πώς να συμπεριφερόμαστε με την ανωμαλία (στο 0) του ηλεκτρικού πεδίου

$$E = -\frac{Q}{4\pi} \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right).$$

Θεωρούμε λοιπόν το σύνολο

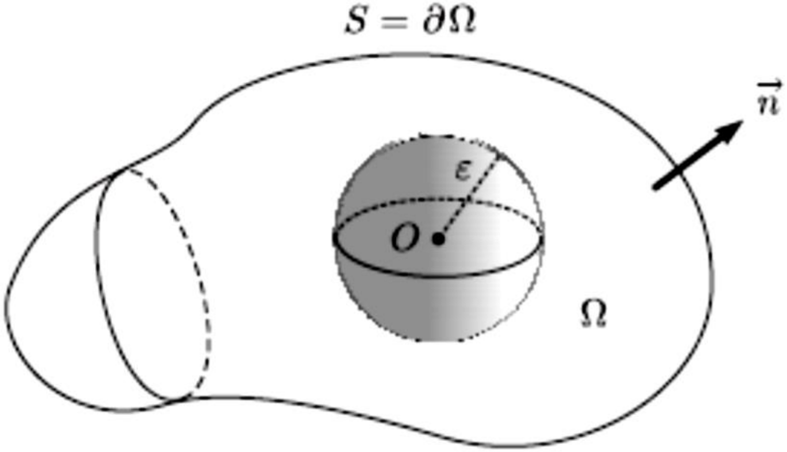
$$\Omega_\varepsilon = \Omega - B(0, \varepsilon)$$

με σύνορο την επιφάνεια

Ο νόμος του Gauss (3)

$$\partial\Omega_\varepsilon = \partial\Omega \cup S(0,\varepsilon),$$

προσανατολισμένη όπως στο σχήμα 3.



Σχήμα 3

Ο νόμος του Gauss (4)

Το ηλεκτρικό πεδίο δεν έχει πλέον ανωμαλίες μέσα στο Ω_ε, άρα από τον Gauss έχουμε

$$\iiint_{\Omega_\varepsilon} divE = \iint_{\partial\Omega_\varepsilon} \langle E, n\rangle = \iint_{\partial\Omega} \langle E, n\rangle - \iint_{S(0,\varepsilon)} \langle E, n\rangle$$

και

$$divE = -div\,\frac{Q}{4\pi}\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right).$$

Αλλά

$$div\,\frac{\vec{r}}{r^3} = \partial_x \frac{x}{r^3} + \partial_y \frac{y}{r^3} + \partial_z \frac{z}{r^3} =$$

Ο νόμος του Gauss (5)

$$= \frac{r^3 - x3r^2 2x \frac{1}{2r}}{r^6} + \frac{r^3 - y3r^2 2y \frac{1}{2r}}{r^6} + \frac{r^3 - z3r^2 2z \frac{1}{2r}}{r^6}$$

$$= \frac{1}{r^3} - 3\frac{x^2}{r^5} + \frac{1}{r^3} - 3\frac{y^2}{r^5} + \frac{1}{r^3} - 3\frac{z^2}{r^5}$$

$$= \frac{3}{r^3} - 3\frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^5} = 0.$$

Επομένως

$$\iint_{\partial\Omega} \langle E, n \rangle = \iint_{S(0,\varepsilon)} \langle E, n \rangle .$$

Όμως, το ηλεκτρικό πεδίο επί της $S(0, \varepsilon)$ είναι ίσο με $-\frac{Q}{4\pi}\frac{\vec{\varepsilon}}{\varepsilon^3}$,

Ο νόμος του Gauss (6)

και η κάθετη στην σφαίρα $S(0,\varepsilon)$ είναι η

$$n = -\frac{\vec{\varepsilon}}{\varepsilon}.$$

Συνεπώς

$$\iint_{S(0,\varepsilon)} \langle E, n\rangle = -\iint_{S(0,\varepsilon)} \frac{Q}{4\pi\varepsilon^3}\langle \vec{\varepsilon}, -\frac{\vec{\varepsilon}}{\varepsilon}\rangle$$

$$= \frac{Q}{4\pi}\iint_{S(0,\varepsilon)} \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^4}$$

$$= \frac{Q}{4\pi}\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^4}\iint_{S(0,\varepsilon)} dS$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon^2} 4\pi\varepsilon^2 = Q.$$

Ο νόμος του Gauss (7)

Τέλος, αν $0 \notin \Omega$, τότε το πεδίο δεν έχει ανωμαλίες, και καθώς $div\,\frac{\vec{r}}{r^3} = 0$, έχουμε αμέσως από το θεώρημα του Gauss ότι

$$\iint_{\partial\Omega} \langle E, n \rangle = \iiint_{\Omega} divE = -\iiint_{\Omega} div\,\frac{Q}{4\pi}\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = 0.$$

Βιβλιογραφία

1. Γ. Γεωργανόπουλος, *Ολοκληρωτικός Λογισμός Πολλών Μεταβλητών*, Εκδόσεις Αδελφοί Κυριακίδη, Θεσσαλονίκη, 1995.
2. Τ. Χατζηαφράτης, *Απειροστικός Λογισμός σε Πολλές Μεταβλητές*, Αθήνα, 1996.
3. J. Marsden, A. Tromba, *Διανυσματικός Λογισμός*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 2000.
4. M. Spivac, *Λογισμός σε Πολλαπλότητες*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 1994.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Μιχάλης Μαριάς. «Λογισμός 4. Ενότητα 19: Το Θεώρημα του Gauss». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

http://eclass.auth.gr/courses/OCRS437/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου
Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2014-2015