ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Στατιστική

5ο Μάθημα: Βασικές Έννοιες Εκτιμητικής

Γεώργιος Μενεξές
Τμήμα Γεωπονίας

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

5ο Μάθημα

Βασικές Έννοιες Εκτιμητικής

Η παρουσίαση βασίζεται σε υλικό κυρίως από το…

- Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο (2003). Σημειώσεις Στατιστικής.

Εκτιμητική: Διαστήματα Εμπιστοσύνης

- Διάστημα τιμών στο οποίο αναμένεται να βρίσκεται η τιμή μιας παραμέτρου Θ με ορισμένη πιθανότητα $1\text{-}\alpha$, $0<\alpha<1$:

$$\boxed{P\left(l \leq \Theta \leq u\right) = 1 - a, \quad 0 < a < 1}$$

- Είναι συνάρτηση του εκτιμητή $\widehat{\Theta}$ σε τυχαίο δείγμα και προσδιορίζεται με βάση την κατανομή του $\widehat{\Theta}$.
- Το $[l, u]$ ονομάζεται διάστημα εμπιστοσύνης με πιθανότητα ή επίπεδο εμπιστοσύνης $1\text{-}\alpha$. Οι τιμές l και u ονομάζονται όρια εμπιστοσύνης του διαστήματος και η πιθανότητα α για την οποία ισχύει:

$$\boxed{P\left(\Theta \notin [l, u]\right) = a}$$

- ονομάζεται επίπεδο σημαντικότητας.

Διάστημα Εμπιστοσύνης για τη Μέση Τιμή Πληθυσμού (1)

(Διασπορά Πληθυσμού Γνωστή)

Αν έχουμε μία τυχαία μεταβλητή X η οποία ακολουθεί κανονική κατανομή με άγνωστη μέση τιμή μ και γνωστή διασπορά σ^2, τότε η μέση τιμή $\bar{X}$ της μεταβλητής X θα ακολουθεί κανονική κατανομή $N\left(\mu, \sigma^2/n\right)$ και η μεταβλητή

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

ακολουθεί την τυπική κανονική κατανομή $N(0, 1)$. Συνεπώς το $100(1\text{-}\alpha)\%$ διάστημα εμπιστοσύνης για τη μέση τιμή μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας των πίνακα τιμών της τυπικής κανονικής κατανομής:

Πηγή: Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο (2003)

Διάστημα Εμπιστοσύνης για τη Μέση Τιμή Πληθυσμού (2)

(Διασπορά Πληθυσμού Γνωστή)

Έχουμε:

$$1-a = P\left(-z_{1-a/2} \le \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le z_{1-a/2}\right) \Rightarrow$$

$$\left[\bar{X} - z_{1-a/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad \bar{X} + z_{1-a/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

Άρα το 100(1-α)% διάστημα εμπιστοσύνης για τη μέση τιμή θα είναι:

$$\left[\bar{X} - z_{1-\alpha/2}\,\sigma/\sqrt{n}\,, \bar{X} + z_{1-\alpha/2}\,\sigma/\sqrt{n}\right]$$

Πηγή: Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο (2003)

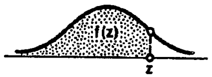
Παράδειγμα 1

Μας δίνεται ότι η ηλικία ενός πληθυσμού ακολουθεί κανονική κατανομή με τυπική απόκλιση 18. Έστω ότι από αυτό τον πληθυσμό έχουμε το παρακάτω δείγμα: 61, 32, 35, 26, 25, 59, 46, 99, 57, 64, 72, 67, 33, 23, 33, 59. Να βρεθούν τα 90%, 95% και 99% διαστήματα εμπιστοσύνης για τη μέση τιμή του πληθυσμού.

Η μέση τιμή του δείγματος είναι $\overline{X} = 49,44$. Το πλήθος του δείγματος είναι 16. Από τον πίνακα τυπικής κανονικής κατανομής παίρνουμε:
$z_{0,95}$=1,64 Άρα το 90% Δ.Ε. είναι: [49,44-1,64*18/4, 49,44+1,64*18/4]= [42,06, 56,82].
$z_{0,975}$=1,96 Άρα το 95% Δ.Ε. είναι: [49,44-1,96*18/4, 49,44+1,96*18/4]= [40,62, 58,26]
$z_{0,995}$=2,58 Άρα το 99% Δ.Ε. είναι: [49,44-2,58*18/4, 49,44+2,58*18/4]=[37,83, 61,05]

Πηγή: Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο (2003)

ΠΙΝΑΚΑΣ 5: Αθροιστικές πιθανότητες της τυπικής κανονικής κατανομής



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91309	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
2.6	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2.8	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
3.0	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99896	0.99900
3.1	0.99903	0.99906	0.99910	0.99913	0.99916	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926	0.99929
3.2	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.99940	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99950
3.3	0.99952	0.99953	0.99955	0.99957	0.99958	0.99960	0.99961	0.99962	0.99964	0.99965
3.4	0.99966	0.99968	0.99969	0.99970	0.99971	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975	0.99976
3.5	0.99977	0.99978	0.99978	0.99979	0.99980	0.99981	0.99981	0.99982	0.99983	0.99983
3.6	0.99984	0.99985	0.99985	0.99986	0.99986	0.99987	0.99987	0.99988	0.99988	0.99989
3.7	0.99989	0.99990	0.99990	0.99990	0.99991	0.99991	0.99992	0.99992	0.99992	0.99992
3.8	0.99993	0.99993	0.99993	0.99994	0.99994	0.99994	0.99994	0.99995	0.99995	0.99995
3.9	0.99995	0.99995	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99997	0.99997
4.0	0.99997	0.99997	0.99997	0.99997	0.99997	0.99997	0.99998	0.99998	0.99998	0.99998

Πηγή: Olkin I.-Gleser L.-Derman C. (1980). "Probability Models

Διάστημα Εμπιστοσύνης για τη Μέση Τιμή Πληθυσμού (3)

(Διασπορά Πληθυσμού Άγνωστη, *n*<30)

Στις περισσότερες πρακτικές εφαρμογές όταν αγνοούμε τη μέση τιμή πληθυσμού αγνοούμε και την διακύμανση του. Στις περιπτώσεις αυτές εκτιμούμε τη διακύμανση του πληθυσμού με την τιμή της δειγματικής διακύμανσης

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}{n-1}$$

Όταν η κατανομή πληθυσμού μπορεί να υποτεθεί κανονική, τότε η τυχαία μεταβλητή

$$t = \frac{\overline{X} - \mu}{s/\sqrt{n}}$$

ακολουθεί την κατανομή *t-student* με $v=n-1$ βαθμούς ελευθερίας. Συνεπώς το 100(1-α)% διάστημα εμπιστοσύνης για τη μέση τιμή μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας των πίνακα τιμών της t κατανομής:

Πηγή: Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο (2003)

Διάστημα Εμπιστοσύνης για τη Μέση Τιμή Πληθυσμού (4)

(Διασπορά Πληθυσμού Άγνωστη, *n*<30)

Έχουμε:

$$1-a=P\left(-t_{\nu,a/2}\leq\frac{\overline{X}-\mu}{s/\sqrt{n}}\leq t_{\nu,a/2}\right)\Rightarrow$$

$$1-a=P\left(-\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\nu,a/2}\leq\overline{X}-\mu\leq\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\nu,a/2}\right)\Rightarrow$$

$$\boxed{\left[\bar{X}-t_{\nu,a/2}\frac{s}{\sqrt{n}},\quad \bar{X}+t_{\nu,a/2}\frac{s}{\sqrt{n}}\right]}$$

Επομένως, αν $\overline{X}$ και s^2 είναι η τιμή του μέσου και της διακύμανσης, αντίστοιχα, σε ορισμένο τυχαίο δείγμα μεγέθους n, τότε θα εκτιμήσουμε ότι το διάστημα

$$\left[\overline{X}-\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\nu,a/2},\overline{X}+\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\nu,a/2}\right]$$

θα περιέχει την μ με επίπεδο εμπιστοσύνης 1-α.

Πηγή: Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο (2003)

Παράδειγμα 2

Μας δίνεται ότι η ηλικία ενός πληθυσμού ακολουθεί κανονική κατανομή. Έστω ότι από αυτό τον πληθυσμό έχουμε το παρακάτω δείγμα: 61, 32, 35, 26, 25, 59, 46, 99, 57, 64, 72, 67, 33, 23, 33, 59. Να βρεθούν τα 90%, 95% και 99% διαστήματα εμπιστοσύνης για τη μέση τιμή του πληθυσμού.

Έχουμε:

Η μέση τιμή του δείγματος είναι $\bar{X} = 49,44$. Η δειγματική διασπορά είναι s^2=451,33

και η δειγματική τυπική απόκλιση είναι s=21,24. Το πλήθος του δείγματος είναι 16. Από τον πίνακα της student κατανομής παίρνουμε:

$t_{15,\,0.05}$=1,753 Άρα το 90% Δ.Ε. είναι: [49,44-1,753 *21,24/4, 49,44+1,753*21,24/4]= [40,13, 58,75].
$t_{15,\,0.025}$=2,131 Άρα το 95% Δ.Ε. είναι: [49,44-2,131 *21,24/4, 49,44+2,131*21,24/4]= [38,12, 60,76]
$t_{15,\,0.005}$=2,947 Άρα το 99% Δ.Ε. είναι: [49,44-2,947*21,24/4, 49,44+2,947*21,24/4]= [33,79, 65,09]

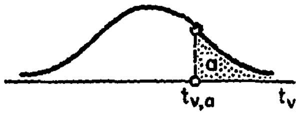
Πηγή: Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο (2003)

Βασικοί Υπολογισμοί (Παράδειγμα 2)

X_i	$X_i - \overline{X}$	$\left(X_i - \overline{X}\right)^2$
61,00	11,56	133,63
32,00	-17,44	304,15
35,00	-14,44	208,51
26,00	-23,44	549,43
25,00	-24,44	597,31
59,00	9,56	91,39
46,00	-3,44	11,83
99,00	49,56	2456,19
57,00	7,56	57,15
64,00	14,56	211,99
72,00	22,56	508,95
67,00	17,56	308,35
33,00	-16,44	270,27
23,00	-26,44	699,07
33,00	-16,44	270,27
59,00	9,56	91,39
791,00		**6769,94**

Πηγή:
Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο (2003)

ΠΙΝΑΚΑΣ 6: Κριτικές Τιμές της Κατανομής t-student



ν	α				
	:100	.050	.025	.010	.005
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
40	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
60	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

Διάστημα Εμπιστοσύνης για τη Μέση Τιμή Πληθυσμού (5)

(Διασπορά Πληθυσμού Άγνωστη, *n*>30)

Εφόσον η διακύμανση του πληθυσμού είναι άγνωστη, την εκτιμούμε με την τιμή της δειγματικής διακύμανσης

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2}{n-1}$$

Όταν η ... είναι
μεγάλο (n ...

$$\left[\bar{X} - z_{1-a/2}\frac{s}{\sqrt{n}}, \quad \bar{X} + z_{1-a/2}\frac{s}{\sqrt{n}}\right]$$

ακολουθε... στημα
εμπιστοσύνης για τη μέση τιμή μπορεί να υπολογιστεί όπως και στην πρώτη περίπτωση με τη μόνη διαφορά ότι θα χρησιμοποιήσουμε την δειγματική τυπική απόκλιση αντί της τυπικής απόκλισης του πληθυσμού. Επομένως, αν $\bar{X}$ και s^2 είναι η τιμή του μέσου και της διακύμανσης, αντίστοιχα, σε ορισμένο τυχαίο δείγμα μεγέθους n, τότε θα εκτιμήσουμε ότι το διάστημα

$$\left[\bar{X} - z_{1-\alpha/2}\, s/\sqrt{n}, \bar{X} + z_{1-\alpha/2}\, s/\sqrt{n}\right]$$

θα περιέχει την μ με επίπεδο εμπιστοσύνης 1-α.

Πηγή:
Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο (2003)

Διάστημα Εμπιστοσύνης για την Αναλογία p Πληθυσμού (n>30) [I]

Αν η αναλογία στον πληθυσμό ισούται με p τότε η κατανομή της δειγματικής αναλογίας $\hat{p}$ σε τυχαίο δείγμα μεγέθους n, όταν το μέγεθος του δείγματος είναι μεγάλο (n 30), προσεγγίζει την κανονική $N\left(p, p\left(1-p\right)/n\right)$ και η μεταβλητή

$$Z = \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\hat{p}\left(1-\hat{p}\right)/n}}$$

ακολουθεί την τυπική κανονική κατανομή $N(0,\ 1)$. Συνεπώς το 100(1-α)% διάστημα εμπιστοσύνης για τη αναλογία μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας των πίνακα τιμών της τυπικής κανονικής κατανομής:

Πηγή: Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο (2003)

Διάστημα Εμπιστοσύνης για την Αναλογία p Πληθυσμού (n>30) [II]

Έχουμε:

$$1-a=P\left(-z_{1-a/2}\leq\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}}\leq z_{1-a/2}\right)\Rightarrow$$

$$1-a=P\left(-\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}z_{1-a/2}\leq\hat{p}-p\leq\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}z_{1-a/2}\right)\Rightarrow$$

$$\left[\hat{p}-z_{1-a/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\quad\hat{p}+z_{1-a/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right]$$

$$1-a=P\left(\hat{p}-\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}z_{1-a/2}\leq p\leq\hat{p}+\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}z_{1-a/2}\right)$$

Άρα το 100(1-α)% διάστημα εμπιστοσύνης για την αναλογία θα είναι:

$$\left[\hat{p}-\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}z_{1-a/2},\hat{p}+\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}z_{1-a/2}\right]$$

Πηγή: Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο (2003)

Παράδειγμα 3

Σε τυχαίο δείγμα από 2000 εκλογείς μιας χώρας οι 400 υποστηρίζουν το κόμμα Α. Να εκτιμηθεί διάστημα εμπιστοσύνης με πιθανότητα 95% για την αναλογία p των εκλογέων που υποστηρίζουν το κόμμα Α.

Έχουμε $\hat{p}$=400/2000=0,2 και $z_{0,975}$=1,96. Συνεπώς εκτιμούμε το ακόλουθο διάστημα εμπιστοσύνης για την αναλογία p του πληθυσμού

$$\left[\hat{p}-\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}z_{1-a/2}, \hat{p}+\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}z_{1-a/2}\right]=$$

$$\left[0,2-\sqrt{\frac{0,2*0,8}{2000}}1,96, \quad 0,2+\sqrt{\frac{0,2*0,8}{2000}}1,96\right]=$$

$$[0,2-0,018, \quad 0,2+0,018]=[0,182, \quad 0,218]$$

με επίπεδο εμπιστοσύνης 95%.

Πηγή: Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο (2003)

Διάστημα Εμπιστοσύνης για τη Διακύμανση Πληθυσμού [I]

Αν s^2 η διακύμανση τυχαίου δείγματος μεγέθους n από μία κανονική τυχαία μεταβλητή με διακύμανση σ^2, τότε η τυχαία μεταβλητή

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$$

ακολουθεί την κατανομή χ^2 με $v = n-1$ βαθμούς ελευθερίας. Συνεπώς το $100(1-\alpha)\%$ διάστημα εμπιστοσύνης για τη διακύμανση μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας των πίνακα τιμών της χι-τετράγωνο κατανομής:

Πηγή: Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο (2003)

Διάστημα Εμπιστοσύνης για τη Διακύμανση Πληθυσμού [II]

Έχουμε:

$$1-a = P\left(\chi^2_{v,1-a/2} \le \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \le \chi^2_{v,a/2}\right) \Rightarrow$$

$$1- \quad P\left(\frac{(n-1)s^2}{\quad} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)s^2}{\quad}\right)$$

$$\left[\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{v,a/2}}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{v,1-a/2}}\right]$$

Επομένως, αν σε ορισμέ ... ακύμανση s^2, τότε
εκτιμούμε ότι το διάστη ... σμού σ^2 με επίπεδο
εμπιστοσύνης 1-α είναι τ

$$\left[\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{v,a/2}}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{v,1-a/2}}\right]$$

Πηγή: Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο (2003)

Παράδειγμα 4

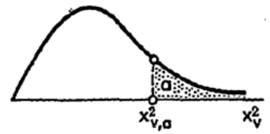
Μας δίνεται ότι η ηλικία ενός πληθυσμού ακολουθεί κανονική κατανομή. Έστω ότι από αυτό τον πληθυσμό έχουμε το παρακάτω δείγμα: 61, 32, 35, 26, 25, 59, 46, 99, 57, 64, 72, 67, 33, 23, 33, 59. Να βρεθεί το 95% διάστημα εμπιστοσύνης για τη διασπορά του πληθυσμού..

Για 1-α=0,95 και α/2=0,025 από τον πίνακα της κατανομής χ^2 βρίσκουμε:

$X^2_{15,\,0.025}$=27,49 και $X^2_{15,\,0.975}$=6,26. Άρα το 95% Δ.Ε. είναι:
[15*451,33/27,49, 15*451,33/6,26]= [246,27, 1082,46]

Πηγή: Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο (2003)

ΠΙΝΑΚΑΣ 7: Κριτικές τιμές της κατανομής χι-τετράγωνο



ν	α: .995	.990	.975	.950	.900	.100	.050	.025	.010	.005
1	0.0^4393	0.0^3157	0.[illegible]982	0.0^2393	0.0158	2.71	3.84	[illegible]02	6.63	7.88
2	0.0100	0.0201	0.[illegible]506	0.103	0.211	4.61	5.99	[illegible]38	9.21	10.60
3	0.072	0.115	0.[illegible]16	0.352	0.584	6.25	7.81	[illegible]35	11.34	12.84
4	0.207	0.297	0.[illegible]84	0.711	1.064	7.78	9.49	11[illegible]14	13.28	14.86
5	0.412	0.554	0.[illegible]31	1.145	1.61	9.24	11.07	12[illegible]83	15.09	16.75
6	0.676	0.872	1.[illegible]4	1.64	2.20	10.64	12.59	14[illegible]45	16.81	18.55
7	0.989	1.24	1.[illegible]9	2.17	2.83	12.02	14.07	16[illegible]01	18.48	20.28
8	1.34	1.65	2.[illegible]8	2.73	3.49	13.36	15.51	17[illegible]53	20.09	21.96
9	1.73	2.09	2.[illegible]0	3.33	4.17	14.68	16.92	19[illegible]02	21.67	23.59
10	2.16	2.56	3.[illegible]5	3.94	4.87	15.99	18.31	20[illegible]48	23.21	25.19
11	2.60	3.05	3.[illegible]2	4.57	5.58	17.28	19.68	21[illegible]92	24.73	26.76
12	3.07	3.57	4.[illegible]0	5.23	6.30	18.55	21.03	23[illegible]34	26.22	28.30
13	3.57	4.11	[illegible]	5.89	7.04	19.81	22.36	2[illegible]74	27.69	29.82
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.09	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.86	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16
19	6.84	7.63	8.91	10.12	11.65	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58
20	7.43	8.26	9.59	10.85	12.44	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00
21	8.03	8.90	10.28	11.59	13.24	29.62	32.67	35.48	38.93	41.40
22	8.64	9.54	10.98	12.34	14.04	30.81	33.92	36.78	40.29	42.80
23	9.26	10.20	11.69	13.09	14.85	32.01	35.17	38.08	41.64	44.18
24	9.89	10.86	12.40	13.85	15.66	33.20	36.42	39.36	42.98	45.56
25	10.52	11.52	13.12	14.61	16.47	34.38	37.65	40.65	44.31	46.93
26	11.16	12.20	13.84	15.38	17.29	35.56	38.89	41.92	45.64	48.29
27	11.81	12.88	14.57	16.15	18.11	36.74	40.11	43.19	46.96	49.64
28	12.46	13.56	15.31	16.93	18.94	37.92	41.34	44.46	48.28	50.99
29	13.12	14.26	16.05	17.71	19.77	39.09	42.56	45.72	49.59	52.34
30	13.79	14.95	16.79	18.49	20.60	40.26	43.77	46.98	50.89	53.67
40	20.71	22.16	24.43	26.51	29.05	51.81	55.76	59.34	63.69	66.77
50	27.99	29.71	32.36	34.76	37.69	63.17	67.50	71.42	76.15	79.49
60	35.53	37.48	40.48	43.19	46.46	74.40	79.08	83.30	88.38	91.95
70	43.28	45.44	48.76	51.74	55.33	85.53	90.53	95.02	100.4	104.2
80	51.17	53.54	57.15	60.39	64.28	96.58	101.9	106.6	112.3	116.3
90	59.20	61.75	65.65	69.13	73.29	107.6	113.1	118.1	124.1	128.3
100	67.33	70.06	74.22	77.93	82.36	118.5	124.3	129.6	135.8	140.2

Βιβλιογραφία

- **Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο (2003).** *Σημειώσεις Στατιστικής*.
- **Φωτιάδης, Ν. (1995).** *Εισαγωγή στη Στατιστική για Βιολογικές Επιστήμες*. Θεσσαλονίκη: University Studio Press.
- **Κολυβά, Φ. και Μπόρα-Σέντα, Ε. (1995).** *Στατιστική: Θεωρία-Εφαρμογές*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις ΖΗΤΗ.
- **Φασούλας, Α. Κ. (ανατ. 2008).** *Στοιχεία Πειραματικής Στατιστικής*. Θεσσαλονίκη: Άγις-Σάββας Δ. Γαρταγάνης.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Γεώργιος Μενεξές. «Στατιστική. Βασικές Έννοιες Εκτιμητικής». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: https://opencourses.auth.gr/courses/OCRS484/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Μαρία Αλεμπάκη

Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2014-2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ