ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Στατιστική

8ο Μάθημα: Εφαρμογές Στατιστικής Ι: Διαστήματα Εμπιστοσύνης

Γεώργιος Μενεξές
Τμήμα Γεωπονίας

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

8ο Μάθημα

Εφαρμογές Στατιστικής Ι: Διαστήματα Εμπιστοσύνης

Εφαρμογή 1

- Η γαλακτοπαραγωγή των αγελάδων μπορεί να θεωρηθεί ως μεταβλητή που ακολουθεί την **Κανονική Κατανομή**. Από προηγούμενες έρευνες είναι γνωστό ότι η **τυπική απόκλιση** της ετήσιας γαλακτοπαραγωγής είναι 1.000 kg.
- Ένα δείγμα 25 αγελάδων μιας φυλής έδωσε μέση ετήσια γαλακτοπαραγωγή 4.290 kg.
- Προσδιορίστε ένα 95% δ.ε. της μέσης γαλακτοπαραγωγής για όλα τα ζώα της φυλής.

Απάντηση

- Η διακύμανση σ^2 του πληθυσμού γνωστή.
- α=0,05
- n=25

$z_{0,025}$

$$\bar{X} - z_{a/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + z_{a/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow$$

$$4290 - 1,96\frac{1000}{\sqrt{25}} \leq \mu \leq 4290 + 1,96\frac{1000}{\sqrt{25}} \Rightarrow$$

$$\boxed{(3898,01,\ 4681,99)}$$

Το 95% δ.ε.

Υπενθύμιση

Παράμετρος πληθυσμού	*Προϋποθέσεις*	*Δείγμα*	*100(1–a)% δ.ε.*
μ	σ^2 γνωστό	οτιδήποτε	$\bar{x} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{a/2}$
	σ^2 άγνωστο	n≥30	$\bar{x} \pm \frac{s}{\sqrt{n}} z_{a/2}$
	σ^2 άγνωστο	n<30	$\bar{x} \pm \frac{s}{\sqrt{n}} t_{n-1;\, a/2}$
σ^2			$\left(\frac{(n-1)s^2}{\mathscr{X}^2_{n-1;\, a/2}}, \frac{(n-1)s^2}{\mathscr{X}^2_{n-1;\, 1-a/2}} \right)$
p		n≥30	$\hat{p} \pm z_{a/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ όπου $\hat{p} = \frac{x}{n}$
		n<30	άβακες
$\mu_1 - \mu_2$	σ_1^2, σ_2^2 γνωστό	οτιδήποτε	$\bar{x} - \bar{y} \pm z_{a/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$
	σ_1^2, σ_2^2 άγνωστο	n, m≥30	$\bar{x} - \bar{y} \pm z_{a/2} \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$

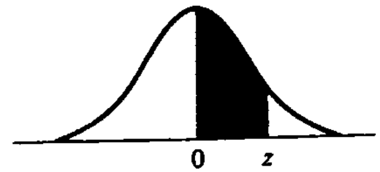
Πηγή: Κολυβά & Μπόρα-Σέντα (1995)

Απάντηση (*συνέχεια*)

- Αν το ζητούμενο διάστημα εμπιστοσύνης ήταν 90% τότε α=0,10 και $z_{\alpha/2}=z_{0,05}=1,64$ (στους πίνακες ψάχνουμε την πιθανότητα 0,5-0,05=0,450 για να βρούμε το αντίστοιχο z)
- Αν το ζητούμενο διάστημα εμπιστοσύνης ήταν 99% τότε α=0,01 και $z_{\alpha/2}=z_{0,005}=2,58$ (στους πίνακες ψάχνουμε την πιθανότητα 0,5-0,005=0,495)
- Αν το ζητούμενο διάστημα εμπιστοσύνης ήταν 80% τότε α=0,20 και $z_{\alpha/2}=z_{0,10}=1,28$ (στους πίνακες ψάχνουμε την πιθανότητα 0,5-0,10=0,400)

Πίνακας

Πιθανοτήτων P(0<Z<z) για την κανονική κατανομή N(0, 1)



z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2517	.2549
0.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990

Εφαρμογή 2

- Από μια ποικιλία βαμβακιού πάρθηκε τυχαίο δείγμα 20 φυτών και προσδιορίστηκε το μέσο βάρος του σύσπορου βαμβακιού ενός καρυδιού από το κάθε φυτό. Τα αποτελέσματα σε γραμμάρια ήταν τα εξής:

Α/Α Φυτού	Μέσο βάρος	Α/Α Φυτού	Μέσο βάρος
1	8,4	11	8,0
2	5,8	12	7,7
3	7,8	13	7,0
4	6,4	14	7,7
5	7,9	15	7,3
6	7,2	16	6,7
7	7,3	17	6,3
8	8,4	18	7,3
9	5,1	19	6,0
10	7,6	20	4,2

Εφαρμογή 2 (*συνέχεια*)

- Με βάση τα δεδομένα του δείγματος αυτού εκτιμήστε το μέσο βάρος καρυδιού σε ολόκληρη την ποικιλία με ένα 95% και με ένα 90% διάστημα εμπιστοσύνης.

Απάντηση

- Η διακύμανση σ^2 του πληθυσμού άγνωστη και θα πρέπει να εκτιμηθεί από το δείγμα (δηλ. θα πρέπει να υπολογίσουμε την s^2)
- α=0,05 και α=0,10
- n=20<30.
- Υπολογίζουμε το μέσο όρο $\boxed{\bar{X} = 7{,}005}$
- Υπολογίζουμε την τυπική απόκλιση $\boxed{s = 1{,}097}$

Υπενθύμιση

Παράμετρος πληθυσμού	*Προϋποθέσεις*	*Δείγμα*	*100(1–a)% δ.ε.*
μ	σ^2 γνωστό	οτιδήποτε	$\bar{x} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{a/2}$
	σ^2 άγνωστο	$n \geq 30$	$\bar{x} \pm \frac{s}{\sqrt{n}} z_{a/2}$
	σ^2 άγνωστο	$n<30$	$\bar{x} \pm \frac{s}{\sqrt{n}} t_{n-1;\, a/2}$
σ^2			$\left(\frac{(n-1)s^2}{\mathscr{X}^2_{n-1;\, a/2}}, \frac{(n-1)s^2}{\mathscr{X}^2_{n-1;\, 1-a/2}} \right)$
p		$n \geq 30$	$\hat{p} \pm z_{a/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ όπου $\hat{p} = \frac{x}{n}$
		$n<30$	άβακες
$\mu_1 - \mu_2$	σ_1^2, σ_2^2 γνωστό	οτιδήποτε	$\bar{x} - \bar{y} \pm z_{a/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$
	σ_1^2, σ_2^2 άγνωστο	$n, m \geq 30$	$\bar{x} - \bar{y} \pm z_{a/2} \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$

Πηγή: Κολυβά & Μπόρα-Σέντα (1995)

Απάντηση (*συνέχεια*)

- Οι βαθμοί ελευθερίας είναι 20-1=19.
- Θα χρησιμοποιήσουμε τους πίνακες της *t*-Κατανομής.

$$\bar{X} - t_{a/2}\frac{s}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{X} + t_{a/2}\frac{s}{\sqrt{n}} \Rightarrow$$

$$7,005 - 2,093\frac{1,097}{\sqrt{20}} \le \mu \le 7,005 + 2,093\frac{1,097}{\sqrt{20}} \Rightarrow$$

$$(6,492, \quad 7,518)$$

Κρίσιμη τιμή της *t*-Κατανομής για 19 β.ε. και επίπεδο σημαντικότητας *α*/2=0,025

Το 95% δ.ε.

Απάντηση (*συνέχεια*)

$$\bar{X} - t_{a/2}\frac{s}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{X} + t_{a/2}\frac{s}{\sqrt{n}} \Rightarrow$$

$$7,005 - 1,729\frac{1,097}{\sqrt{20}} \le \mu \le 7,005 + 1,729\frac{1,097}{\sqrt{20}} \Rightarrow$$

$$\left(6,581, \quad 7,429\right)$$

Το 90% δ.ε.

Κρίσιμη τιμή της *t*-Κατανομής για 19 β.ε. και επίπεδο σημαντικότητας *α*/2=0,05

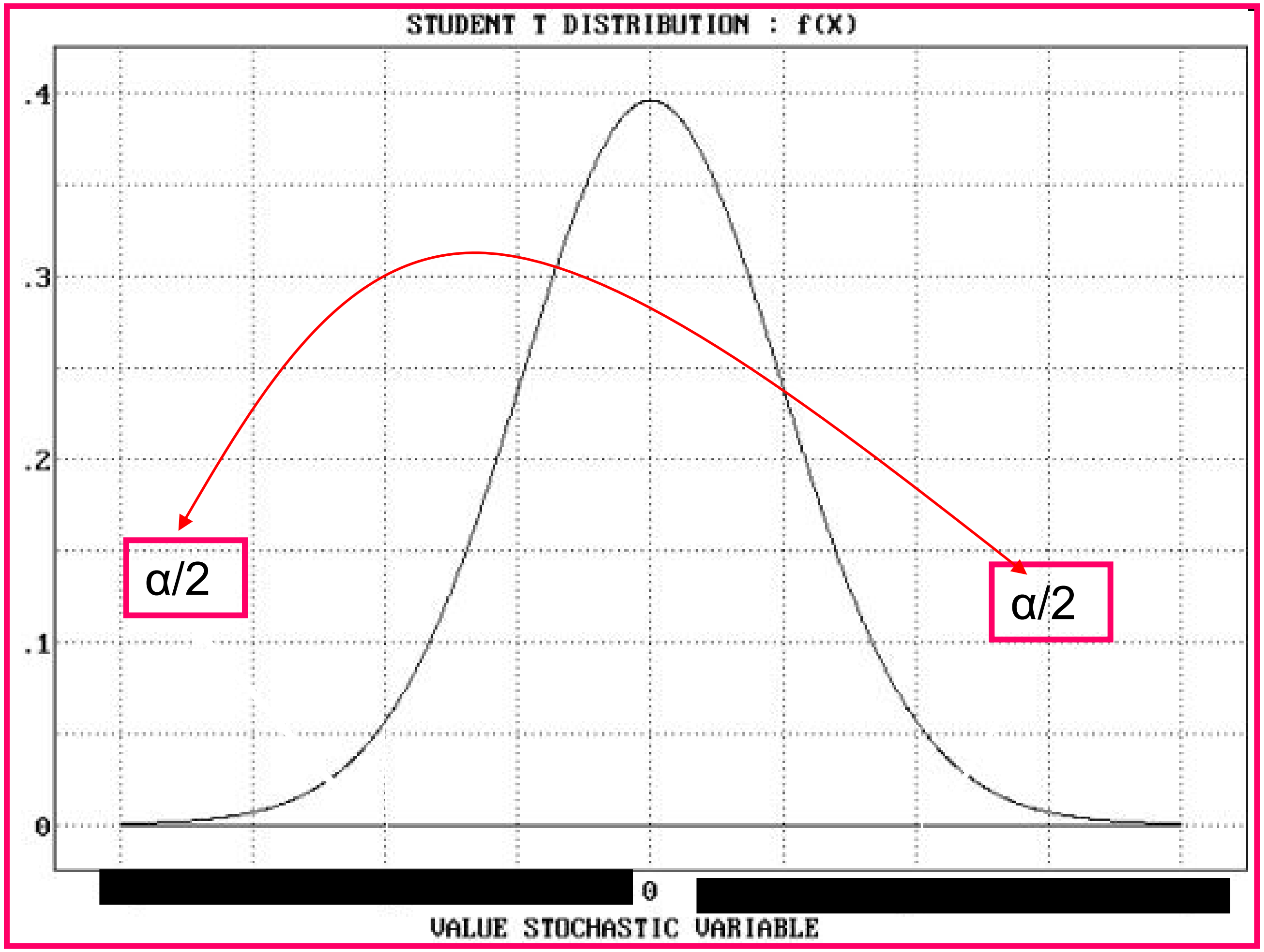
Πίνακας Π.2 Κατανομή t

Βαθμοί ελευθε-ρίας	Πιθανότητα μιας απολύτως μεγαλύτερης τιμής (βλ. σχ. 4.8)								
	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01	0,001
1	1,000	1,376	1,963	3,078	[illegible]	[illegible]	31,821	63,657	636.619
2	0,816	1,061	1,386	1886	2,920	[illegible]	6,965	9,925	31,598
3	0,765	0,978	1,250	1,638	[illegible]	[illegible]	4,541	5,841	12,941
4	0,741	0,941	1,190	1,533	[illegible]	[illegible]	3,747	4,604	8,610
5	0,727	0,920	1,156	1,476	2,015	[illegible]	3,365	4,032	6,859
6	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	[illegible]	3,143	3,707	5,959
7	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	[illegible]	2,998	3,499	5,405
8	0,706	0,889	1,108	1,397	1,860	[illegible]	2,896	3,355	5,041
9	0,703	0,883	1,100	1,383	1,833	[illegible]	2,821	3,250	4,781
10	0,700	0,879	1,093	1,372	1,812	[illegible]	2,764	3,169	4,587
11	0,697	0,876	1,088	1,363	[illegible]	[illegible]	2,718	3,106	4,437
12	0,695	0,873	1,083	1,356	[illegible]	[illegible]	2,681	3,055	4,318
13	0,694	0,870	1,079	1,350	[illegible]	[illegible]	2,650	3,012	4,221
14	0,692	0,868	1,076	1,345	[illegible]	[illegible]	2,624	2,977	4,140
15	0,691	0,866	1,074	1,341	[illegible]	[illegible]	2,602	2,947	4,073
16	0,690	0,865	1,071	1,337	[illegible]	[illegible]	2,583	2,921	4,015
17	0,689	0,863	1,069	1,333	[illegible]	[illegible]	2,567	2,898	3,965
18	0,688	0,862	1,067	1,330	[illegible]	[illegible]	2,552	2,878	3,922
19	0,688	0,861	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,883
20	0,687	0,860	1,064	1,325	[illegible]	[illegible]	2,528	2,845	3,850
21	0,686	0,859	1,063	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,819
22	0,686	0,858	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,792
23	0,685	0,858	1,060	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,767
24	0,685	0,857	1,059	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,745
25	0,684	0,856	1,058	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,725
26	0,684	0,856	1,058	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,707
27	0,684	0,855	1,057	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,690
28	0,683	0,855	1,056	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,674
29	0,683	0,854	1,055	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,659
30	0,683	0,854	1,055	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,646
40	0,681	0,851	1,050	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,551
60	0,679	0,848	1,046	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,460
120	0,677	0,845	1,041	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,373
∞	0,674	0,842	1,036	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,291

Απάντηση (*συνέχεια*)

- Για να βρούμε την κρίσιμη τιμή της *t*-Κατανομής για δοσμένους β.ε. σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha/2$ εργαζόμαστε ως εξής: Έστω ότι α=0,05, θέλουμε $t_{0,025}$=?
- Οι πίνακες του βιβλίου δίνουν τις κρίσιμες τιμές για επίπεδο σημαντικότητας $\alpha/2+\alpha/2=\alpha$ (δηλ. και για τις δύο ουρές της κατανομής)…

t-Κατανομή


STUDENT T DISTRIBUTION : f(X)
.4
.3
.2
.1
0
α/2
α/2
0
VALUE STOCHASTIC VARIABLE

Απάντηση (*συνέχεια*)

- …επομένως αφού ψάχνουμε την κρίσιμη τιμή σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha/2=0{,}05/2=0{,}025$ θα αναζητήσουμε στους πίνακες την κρίσιμη τιμή στο επίπεδο σημαντικότητας $\alpha=0{,}05$, αφού η πιθανότητα είναι 0,025 για τη δεξιά ουρά και 0,025 για την αριστερή (0,025+0,025=0,05).

Εφαρμογή 3

- Οι περιεκτικότητες σε πρωτεΐνη 14 δειγμάτων μιας ποικιλίας σιταριού από ισάριθμα χωράφια μιας ευρύτερης περιοχής ήταν οι εξής:

Α/Α Δείγματος	Περιεκτικότητα	Α/Α Δείγματος	Περιεκτικότητα
1	12,2	8	12,5
2	12,5	9	11,8
3	11,2	10	12,4
4	12,6	11	11,5
5	11,0	12	12,0
6	11,6	13	11,6
7	12,0	14	12,7

Εφαρμογή 3 (*συνέχεια*)

- Υπολογίστε ένα 95% δ.ε. για τη μέση περιεκτικότητα σε πρωτεΐνη όλων των χωραφιών της περιοχής που καλλιεργήθηκαν με την ίδια ποικιλία.
- Δίνονται:

  Άθροισμα παρατηρήσεων=167,60

  Άθροισμα τετραγώνων των διαφορών των παρατηρήσεων από το μέσο όρο=3,789

Απάντηση

- Η διακύμανση σ^2 του πληθυσμού άγνωστη και θα πρέπει να εκτιμηθεί από το δείγμα (δηλ. θα πρέπει να υπολογίσουμε την s^2)
- α=0,05
- n=14<30.
- Υπολογίζουμε το μέσο όρο $\boxed{\bar{X} = 11,97}$
- Υπολογίζουμε την τυπική απόκλιση $\boxed{s = 0,54}$

Υπενθύμιση

Παράμετρος πληθυσμού	*Προϋποθέσεις*	*Δείγμα*	*100(1–a)% δ.ε.*
μ	σ^2 γνωστό	οτιδήποτε	$\bar{x} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{a/2}$
	σ^2 άγνωστο	n≥30	$\bar{x} \pm \frac{s}{\sqrt{n}} z_{a/2}$
	σ^2 άγνωστο	n<30	$\bar{x} \pm \frac{s}{\sqrt{n}} t_{n-1;\, a/2}$
σ^2			$\left(\frac{(n-1)s^2}{\mathscr{X}^2_{n-1;\, a/2}}, \frac{(n-1)s^2}{\mathscr{X}^2_{n-1;\, 1-a/2}} \right)$
p		n≥30	$\hat{p} \pm z_{a/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ όπου $\hat{p} = \frac{x}{n}$
		n<30	άβακες
$\mu_1 - \mu_2$	σ_1^2, σ_2^2 γνωστό	οτιδήποτε	$\bar{x} - \bar{y} \pm z_{a/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$
	σ_1^2, σ_2^2 άγνωστο	n, m≥30	$\bar{x} - \bar{y} \pm z_{a/2} \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$

Πηγή: Κολυβά & Μπόρα-Σέντα (1995)

Απάντηση (*συνέχεια*)

$$\bar{X} - t_{a/2}\frac{s}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{X} + t_{a/2}\frac{s}{\sqrt{n}} \Rightarrow$$

$$11,97 - 2,160\frac{0,54}{\sqrt{14}} \le \mu \le 11,97 + 2,160\frac{0,54}{\sqrt{14}} \Rightarrow$$

$$(11,939, \quad 12,001)$$

Το 95% δ.ε.

Κρίσιμη τιμή της *t*-Κατανομής για 13 β.ε. και επίπεδο σημαντικότητας *α*/2=0,025

Πίνακας Π.2 Κατανομή t

Βαθμοί ελευθε-ρίας	Πιθανότητα μιας απολύτως μεγαλύτερης τιμής (βλ. σχ. 4.8)								
	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01	0,001
1	1,000	1,376	1,963	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	636.619
2	0,816	1,061	1,386	1886	2,920	4,303	6,965	9,925	31,598
3	0,765	0,978	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	12,941
4	0,741	0,941	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610
5	0,727	0,920	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	6,859
6	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959
7	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	5,405
8	0,706	0,889	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041
9	0,703	0,883	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781
10	0,700	0,879	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,587
11	0,697	0,876	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,437
12	0,695	0,873	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	4,318
13	0,694	0,870	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	4,221
14	0,692	0,868	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	4,140
15	0,691	0,866	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	4,073
16	0,690	0,865	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	4,015
17	0,689	0,863	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,965
18	0,688	0,862	1,067	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,922
19	0,688	0,861	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,883
20	0,687	0,860	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,850
21	0,686	0,859	1,063	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,819
22	0,686	0,858	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,792
23	0,685	0,858	1,060	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,767
24	0,685	0,857	1,059	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,745
25	0,684	0,856	1,058	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,725
26	0,684	0,856	1,058	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,707
27	0,684	0,855	1,057	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,690
28	0,683	0,855	1,056	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,674
29	0,683	0,854	1,055	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,659
30	0,683	0,854	1,055	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,646
40	0,681	0,851	1,050	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,551
60	0,679	0,848	1,046	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,460
120	0,677	0,845	1,041	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,373
∞	0,674	0,842	1,036	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,291

Εφαρμογή 4

- Με βάση τα δεδομένα των Εφαρμογών 2 και 3 υπολογίστε τα όρια εμπιστοσύνης της παραλλακτικότητας του πληθυσμού από τον οποίο προήλθε το κάθε δείγμα για επίπεδο εμπιστοσύνης 95%.

$$\boxed{s_1 = 1,097 \Rightarrow s_1^2 = 1,203}$$

$$\boxed{s_2 = 0,54 \Rightarrow s_2^2 = 0,292}$$

Υπενθύμιση

Παράμετρος πληθυσμού	*Προϋποθέσεις*	*Δείγμα*	*100(1–a)% δ.ε.*
μ	σ^2 γνωστό	οτιδήποτε	$\bar{x} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{a/2}$
	σ^2 άγνωστο	n≥30	$\bar{x} \pm \frac{s}{\sqrt{n}} z_{a/2}$
	σ^2 άγνωστο	n<30	$\bar{x} \pm \frac{s}{\sqrt{n}} t_{n-1;\, a/2}$
σ^2			$\left(\frac{(n-1)s^2}{\mathcal{X}^2_{n-1;\, a/2}}, \frac{(n-1)s^2}{\mathcal{X}^2_{n-1;\, 1-a/2}} \right)$
p		n≥30	$\hat{p} \pm z_{a/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ όπου $\hat{p} = \frac{x}{n}$
		n<30	άβακες
$\mu_1 - \mu_2$	σ_1^2, σ_2^2 γνωστό	οτιδήποτε	$\bar{x} - \bar{y} \pm z_{a/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$
	σ_1^2, σ_2^2 άγνωστο	n, m≥30	$\bar{x} - \bar{y} \pm z_{a/2} \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$

Πηγή: Κολυβά & Μπόρα-Σέντα (1995)

Απάντηση

$$\frac{(n-1)s^2}{X^2_{a/2}} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)s^2}{X^2_{1-a/2}} \Rightarrow$$

$$\frac{19.(1,097)^2}{32,852} \le \sigma^2 \le \frac{19.(1,097)^2}{8,907} \Rightarrow$$

$$(0,696, \quad 2,567)$$

Το 95% δ.ε. για την παραλλακτικότητα της Εφαρμογής 2

$$s_1 = 1,097 \Rightarrow s_1^2 = 1,203$$

Απάντηση (*συνέχεια*)

$$\frac{(n-1)s^2}{X^2_{a/2}} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)s^2}{X^2_{1-a/2}} \Rightarrow$$

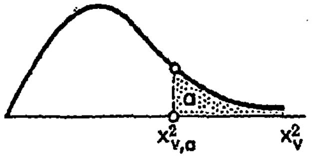
$$\frac{13.(0,54)^2}{24,736} \le \sigma^2 \le \frac{13.(0,54)^2}{5,009} \Rightarrow$$

$$(0,153, \quad 0,757)$$

Το 95% δ.ε. για την παραλλακτικότητα της Εφαρμογής 3

$$s_2 = 0,54 \Rightarrow s_2^2 = 0,292$$

ΠΙΝΑΚΑΣ 7: Κριτικές τιμές της κατανομής χι-τετράγωνο



ν	.995	.990	.975	.950	.900	.100	.050	.025	.010	.005
1	0.0^4393	0.0^3157	0.0^3982	0.0^2393	0.0158	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	0.0100	0.0201	0.0506	0.103	0.211	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	6.25	7.81	9.35	11.34	12.84
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.61	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75
6	0.676	0.872	1.24	1.64	2.20	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55
7	0.989	1.24	1.69	2.17	2.83	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	13.36	15.51	17.53	20.09	21.96
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	17.28	19.68	21.92	24.73	26.76
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.09	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.86	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16
19	6.84	7.63	8.91	10.12	11.65	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58
20	7.43	8.26	9.59	10.85	12.44	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00
21	8.03	8.90	10.28	11.59	13.24	29.62	32.67	35.48	38.93	41.40
22	8.64	9.54	10.98	12.34	14.04	30.81	33.92	36.78	40.29	42.80
23	9.26	10.20	11.69	13.09	14.85	32.01	35.17	38.08	41.64	44.18
24	9.89	10.86	12.40	13.85	15.66	33.20	36.42	39.36	42.98	45.56
25	10.52	11.52	13.12	14.61	16.47	34.38	37.65	40.65	44.31	46.93
26	11.16	12.20	13.84	15.38	17.29	35.56	38.89	41.92	45.64	48.29
27	11.81	12.88	14.57	16.15	18.11	36.74	40.11	43.19	46.96	49.64
28	12.46	13.56	15.31	16.93	18.94	37.92	41.34	44.46	48.28	50.99
29	13.12	14.26	16.05	17.71	19.77	39.09	42.56	45.72	49.59	52.34
30	13.79	14.95	16.79	18.49	20.60	40.26	43.77	46.98	50.89	53.67
40	20.71	22.16	24.43	26.51	29.05	51.81	55.76	59.34	63.69	66.77
50	27.99	29.71	32.36	34.76	37.69	63.17	67.50	71.42	76.15	79.49
60	35.53	37.48	40.48	43.19	46.46	74.40	79.08	83.30	88.38	91.95
70	43.28	45.44	48.76	51.74	55.33	85.53	90.53	95.02	100.4	104.2
80	51.17	53.54	57.15	60.39	64.28	96.58	101.9	106.6	112.3	116.3
90	59.20	61.75	65.65	69.13	73.29	107.6	113.1	118.1	124.1	128.3
100	67.33	70.06	74.22	77.93	82.36	118.5	124.3	129.6	135.8	140.2

Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Εφαρμογή 5

- Από μια αποθήκη γεμάτη φασόλια παίρνουμε ένα δείγμα 100 φασολιών και διαπιστώνουμε ότι τα 30 είναι προσβεβλημένα από βρούχο.
- Υπολογίστε ένα 95% διάστημα εμπιστοσύνης για το ποσοστό των προσβεβλημένων φασολιών στην αποθήκη από την οποία προήλθε το δείγμα.

Υπενθύμιση

Παράμετρος πληθυσμού	*Προϋποθέσεις*	*Δείγμα*	*100(1–a)% δ.ε.*
μ	σ^2 γνωστό	οτιδήποτε	$\bar{x} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{a/2}$
	σ^2 άγνωστο	n≥30	$\bar{x} \pm \frac{s}{\sqrt{n}} z_{a/2}$
	σ^2 άγνωστο	n<30	$\bar{x} \pm \frac{s}{\sqrt{n}} t_{n-1;\, a/2}$
σ^2			$\left(\frac{(n-1)s^2}{\mathscr{X}^2_{n-1;\, a/2}}, \frac{(n-1)s^2}{\mathscr{X}^2_{n-1;\, 1-a/2}} \right)$
p		n≥30	$\hat{p} \pm z_{a/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ όπου $\hat{p} = \frac{x}{n}$
		n<30	άβακες
$\mu_1 - \mu_2$	σ_1^2, σ_2^2 γνωστό	οτιδήποτε	$\bar{x} - \bar{y} \pm z_{a/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$
	σ_1^2, σ_2^2 άγνωστο	n, m≥30	$\bar{x} - \bar{y} \pm z_{a/2} \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$

Πηγή: Κολυβά & Μπόρα-Σέντα (1995)

Απάντηση

$$\hat{p}-z_{a/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\leq p\leq \hat{p}+z_{a/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\Rightarrow$$

$$0,30-1,96\sqrt{\frac{0,30\times 0,70}{100}}\leq p\leq 0,30+1,96\sqrt{\frac{0,30\times 0,70}{100}}\Rightarrow$$

$$(0,21,\quad 0,39)$$

Το 95% δ.ε. για το ποσοστό

1,96 είναι η κρίσιμη τιμή της Τυποποιημένης Κανονικής Κατανομής για επίπεδο σημαντικότητας *α/2*=0,025

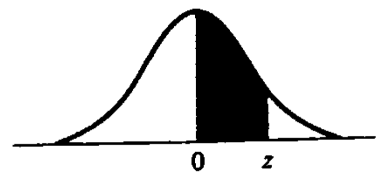
q*=1-*p

Απάντηση (*συνέχεια*)

- Το ζητούμενο διάστημα εμπιστοσύνης είναι 95% τότε α=0,05 και $z_{\alpha/2}=z_{0,025}=1,96$ (στους πίνακες ψάχνουμε την πιθανότητα 0,5-0,025=0,475 για να βρούμε το αντίστοιχο z)
- Αν το ζητούμενο διάστημα εμπιστοσύνης ήταν 99% τότε α=0,01 και $z_{\alpha/2}=z_{0,005}=2,58$ (στους πίνακες ψάχνουμε την πιθανότητα 0,5-0,005=0,495)
- Αν το ζητούμενο διάστημα εμπιστοσύνης ήταν 80% τότε α=0,20 και $z_{\alpha/2}=z_{0,10}=1,28$ (στους πίνακες ψάχνουμε την πιθανότητα 0,5-0,10=0,400)
- Αν το ζητούμενο διάστημα εμπιστοσύνης ήταν 90% τότε α=0,10 και $z_{\alpha/2}=z_{0,05}=1,64$ (στους πίνακες ψάχνουμε την πιθανότητα 0,5-0,05=0,450)

Πίνακας

Πιθανοτήτων $P(0<Z<z)$ για την κανονική κατανομή $N(0, 1)$



z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2517	.2549
0.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990

Εφαρμογή 6

- Το Υπουργείο Γεωργίας θέλει να μάθε τι ποσοστό των κτηνοτρόφων της χώρας παρακολουθεί μια ραδιοφωνική εκπομπή που τους αφορά.
- Επειδή δεν είναι δυνατό να τους ρωτήσει όλους, παίρνει ένα δείγμα 200 κτηνοτρόφων και πληροφορείται ότι 70 από τους 200 ακούν την εκπομπή.
- Με βάση τα δεδομένα του δείγματος αυτού τι μπορείτε να πείτε για το ποσοστό του συνόλου των κτηνοτρόφων που παρακολουθούν την εκπομπή;

Υπενθύμιση

Παράμετρος πληθυσμού	*Προϋποθέσεις*	*Δείγμα*	*100(1–a)% δ.ε.*
μ	σ^2 γνωστό	οτιδήποτε	$\bar{x} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{a/2}$
	σ^2 άγνωστο	n≥30	$\bar{x} \pm \frac{s}{\sqrt{n}} z_{a/2}$
	σ^2 άγνωστο	n<30	$\bar{x} \pm \frac{s}{\sqrt{n}} t_{n-1;\, a/2}$
σ^2			$\left(\frac{(n-1)s^2}{\mathscr{X}^2_{n-1;\, a/2}}, \frac{(n-1)s^2}{\mathscr{X}^2_{n-1;\, 1-a/2}} \right)$
p		n≥30	$\hat{p} \pm z_{a/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ όπου $\hat{p} = \frac{x}{n}$
		n<30	άβακες
$\mu_1 - \mu_2$	σ_1^2, σ_2^2 γνωστό	οτιδήποτε	$\bar{x} - \bar{y} \pm z_{a/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$
	σ_1^2, σ_2^2 άγνωστο	n, m≥30	$\bar{x} - \bar{y} \pm z_{a/2} \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$

Πηγή: Κολυβά & Μπόρα-Σέντα (1995)

Απάντηση

- Το δειγματικό ποσοστό είναι 70/200=0,35 ή 35%
- Ένα 95% δ.ε. είναι το 0,284 έως 0,416 ή 28,4% έως 41,6%
- Ένα 99% δ.ε. είναι το 26,3% έως 43,7%
- Ένα 90% δ.ε. είναι το 29,5% έως 40,5%

Τι παρατηρείτε σχετικά με το εύρος των διαστημάτων;

Εφαρμογή 7

- Με βάση τα δεδομένα της Εφαρμογής 1 υπολογίστε το μέγεθος δείγματος που θα χρειαζόταν για να ελαττωθεί το εύρος του διαστήματος στο μισό αυτού που υπολογίστηκε αρχικά.

$$\boxed{\bar{X} - z_{a/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + z_{a/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Το (1-α)% δ.ε.

Υπενθύμιση

$$n \geq \frac{4z_{a/2}^{2}\sigma^{2}}{d^{2}}$$

Αν η διασπορά του πληθυσμού γνωστή και το (1-α)% δ.ε. θέλουμε να έχει εύρος το πολύ d

$$n \geq \frac{4t_{a/2}^{2}s^{2}}{d^{2}}$$

Αν η διασπορά του πληθυσμού άγνωστη και το (1-α)% δ.ε. θέλουμε να έχει εύρος το πολύ d.

Προσοχή:

Η διαδικασία είναι επαναληπτική

Απάντηση

- Το 95% δ.ε. είναι από 3.898,01 έως 4.681,99, δηλ. το εύρος του είναι 783,98 και επομένως το μισό από αυτό το εύρος είναι 391,99.

$$n \geq \frac{4z_{a/2}^2\sigma^2}{d^2} \Rightarrow n \geq \frac{4.(1,96)^2(1.000)^2}{391,99^2} \Rightarrow$$

$$n \geq 100,005 \approx 100$$

Εφαρμογή 8

- Με βάση τα δεδομένα της Εφαρμογής 2 υπολογίστε το μέγεθος δείγματος που απαιτείται για να έχει το διάστημα εμπιστοσύνης για α=0,05 εύρος ίσο με 0,5.

$$\boxed{\bar{X} - t_{a/2}\frac{s}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{X} + t_{a/2}\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

Το (1-α)% δ.ε.

Απάντηση

$$s_1 = 1,097 \Rightarrow s_1^2 = 1,203 \quad \mu\varepsilon\, 19\ \beta.\varepsilon.$$

$$n \geq \frac{4t_{a/2}^2 s^2}{d^2} \Rightarrow n \geq \frac{4.(2,093)^2.1,203}{0,5^2} = 84,32 \approx 85$$

1

Βρίσκουμε την κρίσιμη τιμή της *t*-Κατανομής για *α*=0,025 και 85-1=84 β.ε. και επαναλαμβάνουμε τον υπολογισμό

$$n \geq \frac{4t_{a/2}^2 s^2}{d^2} \Rightarrow n \geq \frac{4.(1,989)^2.1,203}{0,5^2} = 76,15 \approx 77$$

2

Απάντηση (*συνέχεια*)

- Αν το μέγεθος του δείγματος που υπολογίστηκε είναι σχετικά μικρό επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία για μία ακόμη φορά.

Εφαρμογή 9

- Με βάση τα δεδομένα της Εφαρμογής 5 υπολογίστε το μέγεθος δείγματος που θα χρειαζόταν για να εκτιμηθεί το ποσοστό των προσβεβλημένων φασολιών στην αποθήκη με ένα διάστημα εμπιστοσύνης εύρους 0,10 για επίπεδο εμπιστοσύνης 0,95.

Υπενθύμιση

Το (1-α)% δ.ε.

$$\hat{p} - z_{a/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} \leq p \leq \hat{p} + z_{a/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$$

$$n \geq \frac{4z_{a/2}^{2}\hat{p}\hat{q}}{d^{2}}$$

Απάντηση

$$\boxed{n \geq \frac{4z_{a/2}^{2}\hat{p}\hat{q}}{d^{2}} \Rightarrow n \geq \frac{4.(1,96)^{2}.(0,30).(0,70)}{0,10^{2}} = 322,694 \approx 323}$$

$$\boxed{n \geq 323}$$

Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Εφαρμογή 10

- Τον Ιούλιο του 1969 οι πρώτοι άνθρωποι που πάτησαν στη Σελήνη επιστρέφοντας έφεραν ένα δείγμα από 30 πέτρες που επέλεξε τυχαία ο πρώτος αστροναύτης και ένα δείγμα από 28 πέτρες που επέλεξε τυχαία ο δεύτερος.
- Οι πέτρες του πρώτου αστροναύτη όταν ζυγίστηκαν στη Γη είχαν μέσο βάρος 172 ουγγιές (με διασπορά 299), ενώ του δεύτερου 165 ουγγιές (με διασπορά 312).
- Υποθέτουμε ότι τα δείγματα πάρθηκαν από διαφορετικές περιοχές με διαφορετικές διασπορές. Βρείτε ένα 99% δ.ε. για τη διαφορά μ_1-μ_2 στα βάρη που είχαν οι πέτρες στην επιφάνεια της Σελήνης.

Υπενθύμιση

Πηγή: Κολυβά & Μπόρα-Σέντα (1995)

Παράμετρος πληθυσμού	*Προϋποθέσεις*	*Δείγμα*	*100(1–a)% δ.ε.*
	$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ άγνωστο	n, m<30	$\bar{x}-\bar{y}\pm t_{v;\,a/2}\, s\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}$ όπου $s^2=\frac{(n-1)s_1^2+(m-1)s_2^2}{n+m-2}$ *και* $v=n+m-2$
	$\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$ άγνωστο	n, m<30	$\bar{x}-\bar{y}\pm t_{v;\,a/2}\sqrt{\frac{s_1^2}{n}+\frac{s_2^2}{m}}$ *και* $v=\dfrac{\left(\frac{s_1^2}{n}+\frac{s_2^2}{m}\right)^2}{\frac{\left(\frac{s_1^2}{n}\right)^2}{n-1}+\frac{\left(\frac{s_2^2}{m}\right)^2}{m-1}}$ όταν $n\neq m$ ενώ $v=2(n-1)$ όταν $n=m$
$\mu_1-\mu_2$	ζευγαρωτές παρατηρήσεις	n<30	$\bar{z}\pm\frac{s_z}{\sqrt{n}}t_{n-1;\,a/2}$ όπου $\bar{z}$ η μέση τιμή των x_i-y_i *και* s_z^2 η διασπορά των x_i-y_i
σ_1^2/σ_2^2			$\left(\frac{s_1^2}{s_2^2}\Big/F_{n-1,\,m-1;\,a/2},\ \frac{s_1^2}{s_2^2}F_{m-1,\,n-1;\,a/2}\right)$
p_1-p_2		n, m≥30	$\hat{p}_1-\hat{p}_2\pm z_{a/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n}+\frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{m}}$
		n<30	άβακες

Απάντηση

- Αν θεωρήσουμε ότι τα δείγματα έχουν **ίσες** διασπορές

$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ άγνωστο	n, m<30	$\bar{x}-\bar{y}\pm t_{v;\,a/2}\, s\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}$ όπου $s^2=\frac{(n-1)s_1^2+(m-1)s_2^2}{n+m-2}$ και $v=n+m-2$

- Αν θεωρήσουμε ότι τα δείγματα έχουν **άνισες** διασπορές

$\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$ άγνωστο	n, m<30	$\bar{x}-\bar{y}\pm t_{v;\,a/2}\sqrt{\frac{s_1^2}{n}+\frac{s_2^2}{m}}$ και $v=\frac{\left(\frac{s_1^2}{n}+\frac{s_2^2}{m}\right)^2}{\frac{\left(\frac{s_1^2}{n}\right)^2}{n-1}+\frac{\left(\frac{s_2^2}{m}\right)^2}{m-1}}$ όταν $n\neq m$ ενώ $v=2(n-1)$ όταν $n=m$

Απάντηση (*συνέχεια*)

Πηγή: Κολυβά & Μπόρα-Σέντα (1995)

- Θεωρούμε ότι τα δείγματα έχουν **άνισες** διασπορές.

$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ άγνωστο	n, m<30	$\bar{x}-\bar{y} \pm t_{v;\,a/2}\sqrt{\frac{s_1^2}{n}+\frac{s_2^2}{m}}$ και $\quad v = \dfrac{\left(\frac{s_1^2}{n}+\frac{s_2^2}{m}\right)^2}{\frac{\left(\frac{s_1^2}{n}\right)^2}{n-1}+\frac{\left(\frac{s_2^2}{m}\right)^2}{m-1}}$ όταν $n \neq m$ ενώ $\quad v = 2(n-1)$ όταν $n=m$

$$\bar{X} = 172, \quad s_1^2 = 299$$
$$\bar{Y} = 165, \quad s_2^2 = 312$$
$$n = 30, \quad m = 28, \quad v = 15,3 \approx 16$$
$$t(16)_{0,005} = 2,921$$

$$\left((172-165) \pm 2,921\sqrt{\frac{299}{30}+\frac{312}{28}}\right) = (7 \pm 13,42) =$$
$$(-6,42, \quad 20,42)$$

Το 99% δ.ε.

Απάντηση (*συνέχεια*)

Σε τι συμπέρασμα καταλήγουμε με βάση το 99% δ.ε. για τους μέσους όρους μ_1 και μ_2;

- Εφόσον το 99% δ.ε. περιέχει το μηδέν οι δύο μέσοι όροι δεν διαφέρουν στατιστικά σημαντικά σε επίπεδο σημαντικότητας α=0,01.

Εφαρμογή 11

- Σε μια μελέτη για το αποτέλεσμα της έκθεσης των ανθέων του φυτού *XXXR* σε διαφορετικές περιβαλλοντικές συνθήκες επιλέχθηκαν 10 υγιή φυτά με άνθη ελεύθερα εκτεθειμένα στην κορυφή και άνθη όσο το δυνατόν πιο καλά κρυμμένα στο κάτω μέρος.
- Στη συνέχεια καταμετρήθηκαν οι αριθμοί των σπόρων, που βρέθηκαν να είναι:

Εφαρμογή 11 (*συνέχεια*)

Α/Α Φυτού	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Άνθη στην κορυφή	4	5	6	4	5	4	4	3	5	7
Άνθη στο κάτω μέρος	5	4	5	3	4	4	4	4	3	2

Με βάση τα παραπάνω δεδομένα να βρείτε ένα 90% διάστημα εμπιστοσύνης για την πραγματική διαφορά μ_1-μ_2 στον αριθμό των σπόρων του φυτού *XXXR* που προέρχεται από άνθη στο πάνω και στο κάτω μέρος του φυτού.

Απάντηση

- Επειδή οι μετρήσεις αναφέρονται στο ίδιο φυτό, είναι ζευγαρωτές και το 95% δ.ε. δίνεται:

$$\boxed{\bar{z} \pm \frac{s_z}{\sqrt{n}} t_{n-1;a/2}}$$

Οι διαφορές x_i-y_i

- Όπου z_i= -1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, -1, 2 και 5

$\mu_1 - \mu_2$	ζευγαρωτές παρατηρήσεις	n<30	$\bar{z} \pm \frac{s_z}{\sqrt{n}} t_{n-1;\,a/2}$ όπου $\bar{z}$ η μέση τιμή των $x_i - y_i$ και s_z^2 η διασπορά των $x_i - y_i$

Απάντηση (συνέχεια)

$$\boxed{\overline{z} = 0,900, \quad s_z = 1,729}$$

$$\overline{z} \pm \frac{s_z}{\sqrt{n}} t_{n-1;a/2} \Rightarrow 0,900 \pm \frac{1,729}{\sqrt{10}} 1,833$$

$\mu\varepsilon$

$$t_{n-1;a/2} = t_{9;0,05} = 1,833$$

$$\boxed{(-0,102, \quad 1,902)}$$

Το 90% δ.ε.

Εφαρμογή 12

- Το επιστημονικό περιοδικό *Journal of Fish Biology* δημοσίευσε μια μελέτη που έκανε σύγκριση των παράσιτων που βρέθηκαν στα είδη ψαριών στη Μεσόγειο και στον Ατλαντικό.
- Στη Μεσόγειο από τα 588 ψάρια που πιάστηκαν και εξετάστηκαν βρέθηκαν μολυσμένα από παράσιτα τα 211. Στον Ατλαντικό ωκεανό, από 123 ψάρια που εξετάστηκαν βρέθηκαν μολυσμένα τα 26.
- Συγκρίνετε την αναλογία των παράσιτων στις δύο θάλασσες χρησιμοποιώντας ένα 90% διάστημα εμπιστοσύνης. Ερμηνεύστε τα αποτελέσματα.

Απάντηση

$p_1 - p_2$		n, m≥30	$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 \pm z_{a/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{m}}$
		n<30	άβακες

$$\hat{p}_1 = \frac{211}{588} = 0,36 \qquad \hat{p}_2 = \frac{26}{123} = 0,211$$

$$(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) \pm z_{a/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{m}},$$

$$n = 588, \quad m = 123, \quad z_{0,10/2} = z_{0,05} = 1,64$$

$$(0,36 - 0,211) \pm 1,64\sqrt{\frac{0,36 \times 0,64}{588} + \frac{0,211 \times 0,789}{123}} =$$

$$0,149 \pm 0,069 \Rightarrow$$

$$(0,08, \quad 0,218)$$

Το 90% δ.ε.

Απάντηση (*συνέχεια*)

- Η διαφορά των δύο ποσοστών είναι θετική.
- Η αναλογία p_1 είναι μεγαλύτερη από την αναλογία p_2 (σε ε.σ. α=0,10).
- Η Μεσόγειος έχει μεγαλύτερη αναλογία μολυσμένων ψαριών απ’ ό,τι ο Ατλαντικός Ωκεανός.

Εφαρμογή 13

- Πήραμε 21 παιδιά αγροτών ηλικίας 14 ετών που ζούσαν σε υψόμετρο 1.500 μέτρων και βρήκαμε διασπορά περιφέρειας στήθους 6 cm2.
- Η διασπορά της περιφέρειας στήθους σε 16 παιδιά αγροτών που ζούσαν σε πεδινά μέρη κοντά στη θάλασσα ήταν 4 cm2.
- Βρείτε ένα 98% διάστημα εμπιστοσύνης για το λόγο των διασπορών.

Απάντηση

σ_1^2 / σ_2^2			$\left(\frac{s_1^2}{s_2^2} / F_{n-1,\, m-1;\, a/2},\ \frac{s_1^2}{s_2^2} F_{m-1,\, n-1;\, a/2} \right)$

$$s_1^2 = 6, \quad n = 21, \quad n-1 = 20$$

$$s_2^2 = 4, \quad m = 16, \quad m-1 = 15$$

$$1-a = 0,98, \quad a = 0,02, \quad a/2 = 0,01$$

$$F_{15,20;0,01} = 3,09$$

$$F_{20,15;0,01} = 3,37$$

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{6}{4}$$

Απάντηση (*συνέχεια*)

$$\left(\frac{s_1^2 / s_2^2}{F_{n-1,m-1;a/2}}, \ \frac{s_1^2}{s_2^2} F_{m-1,n-1;a/2} \right) \Rightarrow \left(\frac{6/4}{F_{20,15;0,01}}, \quad \frac{6}{4} F_{15,20;0,01} \right) =$$

$$\left(\frac{1,5}{3,37}, \quad 1,5 \times 3,09 \right) = (0,446, \quad 4,464)$$

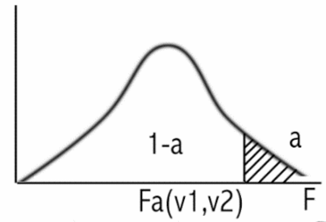
Σε τι συμπέρασμα καταλήγουμε σε σχέση με την ισότητα των δύο παραλλακτικοτήτων;

Απάντηση (*συνέχεια*)

- Εφόσον το 98% δ.ε. περιέχει τη μονάδα οι δύο παραλλακτικότητες δεν διαφέρουν στατιστικά σημαντικά σε ε.σ. α=0,02.

Πίνακας 9α

Τιμές της **F** κατανομής (α=0,01)



n_2 \ n_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞
1	4,052	4,999	5,403	5,625	5,764	5,859	5,928	5,981	6,022	6,056	6,082	6,106	6,142	6,169	6,208	6,234	6,258	6,286	6,302	6,323	6,334	6,352	6,361	6,366
2	98,49	99,00	99,17	99,25	99,30	99,33	99,34	99,36	99,38	99,40	99,41	99,42	99,43	99,44	99,45	99,46	99,47	99,48	99,48	99,49	99,49	99,49	99,50	99,50
3	34,12	30,82	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,34	27,23	27,13	27,05	26,92	26,83	26,69	26,60	26,50	26,41	26,35	26,27	26,23	26,18	26,14	26,12
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,54	14,45	14,37	14,24	14,15	14,02	13,93	13,83	13,74	13,69	13,61	13,57	13,52	13,48	13,46
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,45	10,27	10,15	10,05	9,96	9,89	9,77	9,68	9,55	9,47	9,38	9,29	9,24	9,17	9,13	9,07	9,04	9,02
6	13,74	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,79	7,72	7,60	7,52	7,39	7,31	7,23	7,14	7,09	7,02	6,99	6,94	6,90	6,88
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	7,00	6,84	6,71	6,62	6,54	6,47	6,35	6,27	6,15	6,07	5,98	5,90	5,85	5,78	5,75	5,70	5,67	5,65
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,19	6,03	5,91	5,82	5,74	5,67	5,56	5,48	5,36	5,28	5,20	5,11	5,06	5,00	4,96	4,91	4,88	4,86
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,62	5,47	5,35	5,26	5,18	5,11	5,00	4,92	4,80	4,73	4,64	4,56	4,51	4,45	4,41	4,36	4,33	4,31
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,21	5,06	4,95	4,85	4,78	4,71	4,60	4,52	4,41	4,33	4,25	4,17	4,12	4,05	4,01	3,96	3,93	3,91
11	9,65	7,20	6,22	5,67	5,32	5,07	4,88	4,74	4,63	4,54	4,46	4,40	4,29	4,21	4,10	4,02	3,94	3,86	3,80	3,74	3,70	3,66	3,62	3,60
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,65	4,50	4,39	4,30	4,22	4,16	4,05	3,98	3,86	3,78	3,70	3,61	3,56	3,49	3,46	3,41	3,38	3,36
13	9,07	6,70	5,74	5,20	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	4,02	3,96	3,85	3,78	3,67	3,59	3,51	3,42	3,37	3,30	3,27	3,21	3,18	3,16
14	8,86	6,51	5,56	5,03	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,86	3,80	3,70	3,62	3,51	3,43	3,34	3,26	3,21	3,14	3,11	3,06	3,02	3,00
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,73	3,67	3,56	3,48	3,36	3,29	3,20	3,12	3,07	3,00	2,97	2,92	2,89	2,87
16	8,35	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,61	3,55	3,45	3,37	3,25	3,18	3,10	3,01	2,96	2,89	2,86	2,80	2,77	2,75
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59	3,52	3,45	3,35	3,27	3,16	3,08	3,00	2,92	2,86	2,79	2,76	2,70	2,67	2,65
18	8,28	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,85	3,71	3,60	3,51	3,44	3,37	3,27	3,19	3,07	3,00	2,91	2,83	2,78	2,71	2,68	2,61	2,59	2,57
19	8,18	5,93	5,01	4,50	4,17	3,94	3,77	3,63	3,52	3,43	3,36	3,30	3,19	3,12	3,00	2,92	[illegible]	[illegible]	[illegible]	2,63	2,60	2,54	2,51	2,49
20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,71	3,56	3,45	3,37	3,30	3,23	3,13	3,05	2,94	2,86	[illegible]	[illegible]	[illegible]	2,56	2,53	2,47	2,44	2,45
21	8,02	5,78	4,87	4,37	4,04	3,81	3,65	3,51	3,40	3,31	3,24	3,17	3,07	2,99	2,88	2,80	2,72	[illegible]	[illegible]	2,51	2,47	2,42	2,38	2,36
22	7,94	5,72	4,82	4,31	3,99	3,76	3,59	3,45	3,35	3,26	3,18	3,12	3,02	2,94	2,83	2,75	2,67	2,58	2,53	2,46	2,42	2,37	2,33	2,31
23	7,88	5,66	4,76	4,26	3,94	3,71	3,54	3,41	3,30	3,21	3,14	3,07	2,97	2,89	2,78	2,70	2,62	2,53	2,48	2,41	2,37	2,32	2,28	2,26
24	7,82	5,61	4,72	4,22	3,90	3,67	3,50	3,36	3,25	3,17	3,09	3,03	2,93	2,85	2,74	2,66	2,58	2,49	2,44	2,36	2,33	2,27	2,23	2,21
25	7,77	5,57	4,68	4,18	3,86	3,63	3,46	3,32	3,21	3,13	3,05	2,99	2,89	2,81	2,70	2,62	2,54	2,45	2,40	2,32	2,29	2,23	2,19	2,17
26	7,72	5,53	4,64	4,14	3,82	3,59	3,42	3,29	3,17	3,09	3,02	2,96	2,86	2,77	2,66	2,58	2,50	2,41	2,36	2,28	2,25	2,19	2,15	2,13

3,09

Βιβλιογραφία

- **Φωτιάδης, Ν. (1995).** *Εισαγωγή στη Στατιστική για Βιολογικές Επιστήμες*. Θεσσαλονίκη: University Studio Press.
- **Κολυβά, Φ. και Μπόρα-Σέντα, Ε. (1995).** *Στατιστική: Θεωρία-Εφαρμογές*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις ΖΗΤΗ.
- **Φασούλας, Α. Κ. (ανατ. 2008).** *Στοιχεία Πειραματικής Στατιστικής*. Θεσσαλονίκη: Άγις-Σάββας Δ. Γαρταγάνης.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Γεώργιος Μενεξές. «Στατιστική. Εφαρμογές Στατιστικής Ι: Διαστήματα Εμπιστοσύνης». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: https://opencourses.auth.gr/courses/OCRS484/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Μαρία Αλεμπάκη

Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2014-2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης