



ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΥΔΑΤΙΚΩΝ ΠΟΡΩΝ

Απλές εφαρμογές μη γραμμικού προγραμματισμού.
Δυναμικός προγραμματισμός

Νικόλαος Θεοδοσίου- Αν. καθηγήτης
Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών Α.Π.Θ



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

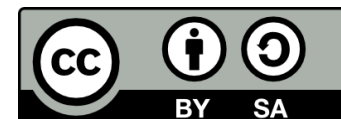


ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ



Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Εφαρμογές μαθηματικού προγραμματισμού στη διαχείριση των υδατικών πόρων

- Μαθηματικά μοντέλα διαχείρισης – διαμόρφωση προβλημάτων, δυνατότητες και περιορισμοί
- Γραμμικοποίηση μη γραμμικών προβλημάτων – πίνακας μοναδιαίας απόκρισης
- Απλές εφαρμογές μη γραμμικού προγραμματισμού – δυναμικός προγραμματισμός
- Σύγχρονες μεταευρετικές - στοχαστικές μέθοδοι – γενετικοί αλγόριθμοι, αναζήτηση μουσικής αρμονίας
- Σύνθετες εφαρμογές – συνδυαστικές αναλύσεις γραμμικού και μη γραμμικού προγραμματισμού



ΔΥΝΑΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

● Μαθηματικό μοντέλο

↓ Αντικειμενική συνάρτηση

$$V = v_1(x_1) + v_2(x_2) + \dots + v_n(x_n) = \max$$

↓ Περιορισμοί

$$a_{11}(x_1) + a_{12}(x_2) + \dots + a_{1n}(x_n) \leq b_1$$

$$a_{21}(x_1) + a_{22}(x_2) + \dots + a_{2n}(x_n) \leq b_2$$

.....

$$a_{m1}(x_1) + a_{m2}(x_2) + \dots + a_{mn}(x_n) \leq b_m$$

$$x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$



ΔΥΝΑΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

- Μονομεταβλητές και διμεταβλητές διαδικασίες
- Οι συναρτήσεις $v_1(x_1), v_2(x_2), \dots, v_n(x_n)$, μπορούν να είναι οποιεσδήποτε συναρτήσεις, ακόμα και μη συνεχείς
- Στο δυναμικό προγραμματισμό, σε αντίθεση με το γραμμικό προγραμματισμό δεν είναι απαραίτητη προϋπόθεση επίλυσης η κυρτότητα του χώρου δυνατής πολιτικής



ΔΥΝΑΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

- Εταιρία υδάτων υδροδοτεί n το πλήθος περιοχές
- Τα χρήματα που εισπράττει από κάθε περιοχή εξαρτώνται τόσο από τον όγκο νερού που διαθέτει, όσο και από την περιοχή, δηλ. $v_1(x_1)$, $v_2(x_2), \dots, v_n(x_n)$
- Ο συνολικός όγκος νερού που μπορεί να διαθέσει η εταιρία σ' όλες τις περιοχές δεν μπορεί να υπερβεί τις b μονάδες
- Θα υπολογιστεί ο όγκος του νερού που θα διαθέσει η εταιρία σε κάθε περιοχή, ώστε να μεγιστοποιήσει τις εισπράξεις της



ΔΥΝΑΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

- Μαθηματικό μοντέλο

↓ Αντικειμενική συνάρτηση

$$V = v_1(x_1) + v_2(x_2) + \dots + v_n(x_n) = \max$$

↓ Περιορισμοί

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq b$$

$$x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$



ΔΥΝΑΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

- Προσδιορίζονται οι μεταβλητές x_1, x_2, \dots, x_n διαδοχικά και όχι ταυτόχρονα
- Το πρόβλημα διασπάται σε n το πλήθος αλληλοσυνδεόμενα προβλήματα με μια μεταβλητή το καθένα
- Αλληλουχία αποφάσεων που κάθε μια τους επηρεάζει τις επόμενες και όλες μαζί δημιουργούν ένα βέλτιστο αποτέλεσμα



ΔΥΝΑΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

- Κάθε επιμέρους πρόβλημα ονομάζεται στάδιο. Τα στάδια είναι ισάριθμα με τις μεταβλητές απόφασης
- Σε κάθε στάδιο επικρατεί μια κατάσταση στη διαδικασία που εξαρτάται από τις μεταβλητές που την περιγράφουν. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα η κατάσταση στη διαδικασία είναι η ποσότητα νερού q που μπορεί να διαθέσει η εταιρία σε κάθε στάδιο
- Στο πρώτο στάδιο η κατάσταση είναι q , όπου $0 \leq q \leq b$
- Στο συγκεκριμένο πρόβλημα η διαδικασία χαρακτηρίζεται ως διαδικασία μιας κατάστασης



ΔΥΝΑΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

- Επαγωγική λύση

$$V = v_1(x_1) + v_2(x_2) + \dots + v_{k-1}(x_{k-1}) = \max$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{k-1} = q \quad (0 \leq q \leq b)$$

↓ Είναι γνωστή η λύση του k-1 σταδίου:

$$x_1^*(q), x_2^*(q), \dots, x_{k-1}^*(q), \quad f_{k-1}(q) = \max V$$

↓ Θα υπολογιστεί η λύση του k σταδίου

$$V = v_1(x_1) + v_2(x_2) + \dots + v_{k-1}(x_{k-1}) + v_k(x_k) = \max$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{k-1} + x_k = q \quad (0 \leq q \leq b)$$



ΔΥΝΑΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

- Η κατάσταση στο στάδιο k είναι q , δηλ. η ποσότητα του νερού που μπορεί να διατεθεί στο στάδιο αυτό είναι q
- Αν πάρουμε την απόφαση να διαθέσουμε στην περιοχή k ποσότητα νερού x_k , όπου $0 \leq x_k \leq q$, τότε σ' όλες τις προηγούμενες $k-1$ περιοχές μπορεί να διατεθεί $q - x_k$ ποσότητα νερού
- Η κατάσταση στο στάδιο $k-1$ είναι $q - x_k$ και η μέγιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης μέχρι το στάδιο $k-1$ είναι ίση με $f_{k-1}(q - x_k)$ (γνωστή)



ΔΥΝΑΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

- Με δεδομένη την απόφαση να διαθέσουμε ποσότητα νερού x_k στην περιοχή k το μέγιστο οικονομικό όφελος μέχρι το στάδιο k είναι:

$$A_k(q, x_k) = v_k(x_k) + f_{k-1}(q - x_k)$$

- Η βέλτιστη πολιτική μέχρι το στάδιο k είναι:

$$f_k(q) = \max[A_k(q, x_k)] = \max[v_k(x_k) + f_{k-1}(q - x_k)]$$

$$0 \leq q \leq b$$

$$0 \leq x_k \leq q$$



ΔΥΝΑΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

- Η επαγωγική διαδικασία αρχίζει από το πρώτο στάδιο που έχει λύση

$$f_1(q) = \max[v_1(x_1)]$$

$$0 \leq q \leq b$$

$$0 \leq x_1 \leq q$$

- Αρχή του Bellman: Σε μια αλληλουχία αποφάσεων (πολιτική), ανεξάρτητα από την κατάσταση που επικρατεί και την απόφαση που παίρνουμε στο k στάδιο, οι υπόλοιπες αποφάσεις στα $k-1$ στάδια πρέπει να αποτελούν μια βέλτιστη πολιτική σε σχέση με την κατάσταση που είναι αποτέλεσμα της απόφασης στο στάδιο k



ΔΥΝΑΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

- Αν το μαθηματικό μοντέλο είχε τη μορφή

↓ Αντικειμενική συνάρτηση

$$V = v_1(x_1) + v_2(x_2) + \dots + v_n(x_n) = \max$$

↓ Περιορισμός

$$a_{11}(x_1) + a_{12}(x_2) + \dots + a_{1n}(x_n) \leq b_1$$

- Η λύση θα ήταν:

$$f_k(q) = \max[A_k(q, x_k)] = \max\{v_k(x_k) + f_{k-1}[q - a_{1k}(x_k)]\}$$

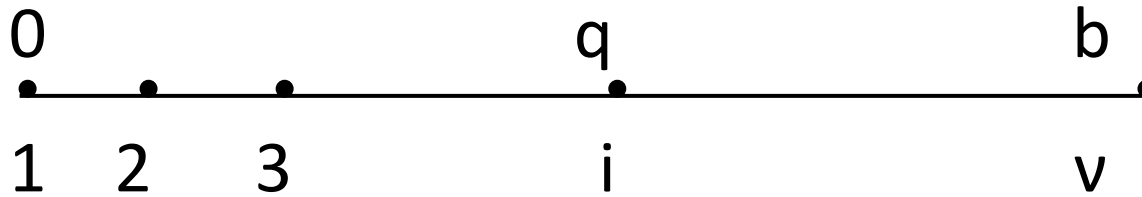
$$0 \leq q \leq b_1$$

$$0 \leq a_{1k}(x_k) \leq q$$



ΔΥΝΑΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

- Η υπολογιστική διαδικασία συνδέεται γραμμικά με το πλήθος των σταδίων, αλλά εξαρτάται κατά εκθετικό τρόπο από το βαθμό διακριτοποίησης του διαστήματος b .



- Για την κατάσταση q το πλήθος των υπολογισμών είναι i
Για όλες τις καταστάσεις του σταδίου το πλήθος των υπολογισμών είναι $(1+n)n/2=(n^2+n)/2$
Αν τα στάδια είναι n , το πλήθος των υπολογισμών είναι $n(n^2+n)/2$



ΔΥΝΑΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

- Μονομεταβλητές διαδικασίες δύο καταστάσεων

↓ Αντικειμενική συνάρτηση

$$V = v_1(x_1) + v_2(x_2) + \dots + v_n(x_n) = \max$$

↓ Περιορισμοί

$$a_{11}(x_1) + a_{12}(x_2) + \dots + a_{1n}(x_n) = q_1 \leq b_1$$

$$a_{21}(x_1) + a_{22}(x_2) + \dots + a_{2n}(x_n) = q_2 \leq b_2$$

- Λύση

$$f_k(q_1, q_2) = \max[A_k(q_1, q_2, x_k)] =$$

$$= \max\{v_k(x_k) + f_{k-1}[q_1 - a_{1k}(x_k), q_2 - a_{2k}(x_k)]\}$$

$$0 \leq q_1 \leq b_1, \quad 0 \leq q_2 \leq b_2$$

$$0 \leq a_{1k}(x_k) \leq q_1, \quad 0 \leq a_{2k}(x_k) \leq q_2$$



ΔΥΝΑΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

- Διμεταβλητές διαδικασίες

↓ Αντικειμενική συνάρτηση

$$V = v_1(x_1, y_1) + v_2(x_2, y_2) + \dots + v_n(x_n, y_n) = \max$$

↓ Περιορισμοί

$$a_{11}(x_1) + a_{12}(x_2) + \dots + a_{1n}(x_n) = q \leq b_1$$

$$c_{11}(y_1) + c_{12}(y_2) + \dots + c_{1n}(y_n) = r \leq d_1$$

- Λύση

$$f_k(q, r) = \max[A_k(q, r, x_k, y_k)] = \\ = \max\{v_k(x_k, y_k) + f_{k-1}[q - a_{1k}(x_k), r - c_{1k}(y_k)]\}$$

$$0 \leq q \leq b_1, \quad 0 \leq r \leq d_1$$

$$0 \leq a_{1k}(x_k) \leq q, \quad 0 \leq c_{1k}(y_k) \leq r$$



ΔΥΝΑΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

● Παράδειγμα

- ↓ Εταιρία ύδρευσης διαθέτει 100 εκατ. € για την κατασκευή των συμπληρωματικών έργων A, B, C, D, με σκοπό να μειώσει το κόστος του νερού
- ↓ Η μείωση του κόστους του νερού ανά m^3 είναι:

Για το έργο A

$$y = 1,90 \left[1,6326 - e^{\frac{\left(\frac{x}{10^6} - 70\right)^2}{10^4}} \right] \quad \text{€}$$

Για το έργο B

$$y = 1,1 \cdot 10^{-8} x \quad \text{€}$$



ΔΥΝΑΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

↓ Για τα έργα C και D τα x και y δίνονται από τον πίνακα

| x (εκ.€) | C: y (€) | D: y (€) |
|------------|------------|------------|
| 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 10.00 | 0.02 | 0.25 |
| 20.00 | 0.05 | 0.50 |
| 30.00 | 0.25 | 0.75 |
| 40.00 | 0.75 | 1.00 |
| 50.00 | 1.80 | 1.25 |
| 60.00 | 2.00 | 1.00 |
| 70.00 | 2.20 | 0.75 |
| 80.00 | 2.30 | 0.75 |
| 90.00 | 2.35 | 0.75 |
| 100.00 | 2.40 | 0.75 |

↓ Θα υπολογιστούν τα έργα και η δαπάνη κατασκευής κάθε έργου, ώστε να μειωθεί κατά το μέγιστο δυνατό το κόστος του νερού



ΔΥΝΑΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

- Μαθηματικό μοντέλο

↓ Αντικειμενική συνάρτηση

$$V = v_1(x_1) + v_2(x_2) + v_3(x_3) + v_4(x_4) = \max$$

↓ Περιορισμοί

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = q \leq 100$$

$$x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$



ΔΥΝΑΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

- Πινακοποίηση των δεδομένων

| x | $v_1(x)$ | $v_2(x)$ | $v_3(x)$ | $v_4(x)$ |
|-----|----------|----------|----------|----------|
| 0 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 |
| 10 | 0,38 | 0,11 | 0,02 | 0,25 |
| 20 | 0,66 | 0,22 | 0,05 | 0,50 |
| 30 | 0,87 | 0,33 | 0,25 | 0,75 |
| 40 | 1,02 | 0,44 | 0,75 | 1,00 |
| 50 | 1,12 | 0,55 | 1,80 | 1,25 |
| 60 | 1,18 | 0,66 | 2,00 | 1,00 |
| 70 | 1,20 | 0,77 | 2,20 | 0,75 |
| 80 | 1,18 | 0,88 | 2,30 | 0,75 |
| 90 | 1,12 | 0,99 | 2,35 | 0,75 |
| 100 | 1,02 | 1,10 | 2,40 | 0,75 |



ΔΥΝΑΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

● 1ος πίνακας

| x | $v_1(x)$ | $v_2(x)$ | $v_3(x)$ | $v_4(x)$ |
|-----|----------|----------|----------|----------|
| 0 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 |
| 10 | 0,38 | 0,11 | 0,02 | 0,25 |
| 20 | 0,66 | 0,22 | 0,05 | 0,50 |
| 30 | 0,87 | 0,33 | 0,25 | 0,75 |
| 40 | 1,02 | 0,44 | 0,75 | 1,00 |
| 50 | 1,12 | 0,55 | 1,80 | 1,25 |
| 60 | 1,18 | 0,66 | 2,00 | 1,00 |
| 70 | 1,20 | 0,77 | 2,20 | 0,75 |
| 80 | 1,18 | 0,88 | 2,30 | 0,75 |
| 90 | 1,12 | 0,99 | 2,35 | 0,75 |
| 100 | 1,02 | 1,10 | 2,40 | 0,75 |

| $q x_1$ | $A_1(q, x_1) = v_1(x_1)$ | | | | | | | | | | | $f_1(q) = \max A_1(q, x_1)$ | |
|---------|--------------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|-----------------------------|------------|
| | 0 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 | $f_1(q)$ | $x_1^*(q)$ |
| 0 | 0 | | | | | | | | | | | 0 | 0 |
| 10 | 0 | 0,38 | | | | | | | | | | 0,38 | 10 |
| 20 | 0 | 0,38 | 0,66 | | | | | | | | | 0,66 | 20 |
| 30 | 0 | 0,38 | 0,66 | 0,87 | | | | | | | | 0,87 | 30 |
| 40 | 0 | 0,38 | 0,66 | 0,87 | 1,02 | | | | | | | 1,02 | 40 |
| 50 | 0 | 0,38 | 0,66 | 0,87 | 1,02 | 1,12 | | | | | | 1,12 | 50 |
| 60 | 0 | 0,38 | 0,66 | 0,87 | 1,02 | 1,12 | 1,18 | | | | | 1,18 | 60 |
| 70 | 0 | 0,38 | 0,66 | 0,87 | 1,02 | 1,12 | 1,18 | 1,20 | | | | 1,20 | 70 |
| 80 | 0 | 0,38 | 0,66 | 0,87 | 1,02 | 1,12 | 1,18 | 1,20 | 1,18 | | | 1,20 | 70 |
| 90 | 0 | 0,38 | 0,66 | 0,87 | 1,02 | 1,12 | 1,18 | 1,20 | 1,18 | 1,12 | | 1,20 | 70 |
| 100 | 0 | 0,38 | 0,66 | 0,87 | 1,02 | 1,12 | 1,18 | 1,20 | 1,18 | 1,12 | 1,02 | 1,20 | 70 |



ΔΥΝΑΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

● 2ος πίνακας

| x | $v_1(x)$ | $v_2(x)$ | $v_3(x)$ | $v_4(x)$ |
|-----|----------|----------|----------|----------|
| 0 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 |
| 10 | 0,38 | 0,11 | 0,02 | 0,25 |
| 20 | 0,66 | 0,22 | 0,05 | 0,50 |
| 30 | 0,87 | 0,33 | 0,25 | 0,75 |
| 40 | 1,02 | 0,44 | 0,75 | 1,00 |
| 50 | 1,12 | 0,55 | 1,80 | 1,25 |
| 60 | 1,18 | 0,66 | 2,00 | 1,00 |
| 70 | 1,20 | 0,77 | 2,20 | 0,75 |
| 80 | 1,18 | 0,88 | 2,30 | 0,75 |
| 90 | 1,12 | 0,99 | 2,35 | 0,75 |
| 100 | 1,02 | 1,10 | 2,40 | 0,75 |

| $f_1(q)=\max A_1(q,x_1)$ | |
|--------------------------|------------|
| $f_1(q)$ | $x_1^*(q)$ |
| 0 | 0 |
| 0,38 | 10 |
| 0,66 | 20 |
| 0,87 | 30 |
| 1,02 | 40 |
| 1,12 | 50 |
| 1,18 | 60 |
| 1,20 | 70 |
| 1,20 | 70 |
| 1,20 | 70 |
| 1,20 | 70 |

| | | $A_2(q,x_2)=v_2(x_2)+f_1(q-x_2)$ | | | | | | | | | | $f_2(q)=\max A_2(q,x_2)$ | |
|--------------------|------|----------------------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|--------------------------|------------|
| $q \backslash x_2$ | 0 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 | $f_2(q)$ | $x_2^*(q)$ |
| 0 | 0,00 | | | | | | | | | | | 0 | 0 |
| 10 | 0,38 | 0,11 | | | | | | | | | | 0,38 | 0 |
| 20 | 0,66 | 0,49 | 0,22 | | | | | | | | | 0,66 | 0 |
| 30 | 0,87 | 0,77 | 0,60 | 0,33 | | | | | | | | 0,87 | 0 |
| 40 | 1,02 | 0,98 | 0,88 | 0,71 | 0,44 | | | | | | | 1,02 | 0 |
| 50 | 1,12 | 1,13 | 1,09 | 0,99 | 0,82 | 0,55 | | | | | | 1,13 | 10 |
| 60 | 1,18 | 1,23 | 1,24 | 1,20 | 1,10 | 0,93 | 0,66 | | | | | 1,24 | 20 |
| 70 | 1,20 | 1,29 | 1,34 | 1,35 | 1,31 | 1,21 | 1,04 | 0,77 | | | | 1,35 | 30 |
| 80 | 1,20 | 1,31 | 1,40 | 1,45 | 1,46 | 1,42 | 1,32 | 1,15 | 0,88 | | | 1,46 | 40 |
| 90 | 1,20 | 1,31 | 1,42 | 1,51 | 1,56 | 1,57 | 1,53 | 1,43 | 1,26 | 0,99 | | 1,57 | 50 |
| 100 | 1,20 | 1,31 | 1,42 | 1,53 | 1,62 | 1,67 | 1,68 | 1,64 | 1,54 | 1,37 | 1,10 | 1,68 | 60 |



ΔΥΝΑΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

• 3ος πίνακας

| x | $v_1(x)$ | $v_2(x)$ | $v_3(x)$ | $v_4(x)$ |
|-----|----------|----------|----------|----------|
| 0 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 |
| 10 | 0,38 | 0,11 | 0,02 | 0,25 |
| 20 | 0,66 | 0,22 | 0,05 | 0,50 |
| 30 | 0,87 | 0,33 | 0,25 | 0,75 |
| 40 | 1,02 | 0,44 | 0,75 | 1,00 |
| 50 | 1,12 | 0,55 | 1,80 | 1,25 |
| 60 | 1,18 | 0,66 | 2,00 | 1,00 |
| 70 | 1,20 | 0,77 | 2,20 | 0,75 |
| 80 | 1,18 | 0,88 | 2,30 | 0,75 |
| 90 | 1,12 | 0,99 | 2,35 | 0,75 |
| 100 | 1,02 | 1,10 | 2,40 | 0,75 |

| $f_1(q)=\max A_1(q,x_1)$ | |
|--------------------------|------------|
| $f_1(q)$ | $x_1^*(q)$ |
| 0 | 0 |
| 0,38 | 10 |
| 0,66 | 20 |
| 0,87 | 30 |
| 1,02 | 40 |
| 1,12 | 50 |
| 1,18 | 60 |
| 1,20 | 70 |
| 1,20 | 70 |
| 1,20 | 70 |
| 1,20 | 70 |

| $f_2(q)=\max A_2(q,x_2)$ | |
|--------------------------|------------|
| $f_2(q)$ | $x_2^*(q)$ |
| 0 | 0 |
| 0,38 | 0 |
| 0,66 | 0 |
| 0,87 | 0 |
| 1,02 | 0 |
| 1,13 | 10 |
| 1,24 | 20 |
| 1,35 | 30 |
| 1,46 | 40 |
| 1,57 | 50 |
| 1,68 | 60 |

| $q x_3$ | $A_3(q,x_3)=v_3(x_3)+f_2(q-x_3)$ | | | | | | | | | | | $f_3(q)=\max A_3(q,x_3)$ | |
|---------|----------------------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|--------------------------|------------|
| | 0 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 | $f_3(q)$ | $x_3^*(q)$ |
| 0 | 0,00 | | | | | | | | | | | 0 | 0 |
| 10 | 0,38 | 0,02 | | | | | | | | | | 0,38 | 0 |
| 20 | 0,66 | 0,40 | 0,05 | | | | | | | | | 0,66 | 0 |
| 30 | 0,87 | 0,68 | 0,43 | 0,25 | | | | | | | | 0,87 | 0 |
| 40 | 1,02 | 0,89 | 0,71 | 0,63 | 0,75 | | | | | | | 1,02 | 0 |
| 50 | 1,13 | 1,04 | 0,92 | 0,91 | 1,13 | 1,80 | | | | | | 1,80 | 50 |
| 60 | 1,24 | 1,15 | 1,07 | 1,12 | 1,41 | 2,18 | 2,00 | | | | | 2,18 | 50 |
| 70 | 1,35 | 1,26 | 1,18 | 1,27 | 1,62 | 2,46 | 2,38 | 2,20 | | | | 2,46 | 50 |
| 80 | 1,46 | 1,37 | 1,29 | 1,38 | 1,77 | 2,67 | 2,66 | 2,58 | 2,30 | | | 2,67 | 50 |
| 90 | 1,57 | 1,48 | 1,40 | 1,49 | 1,88 | 2,82 | 2,87 | 2,86 | 2,68 | 2,35 | | 2,87 | 60 |
| 100 | 1,68 | 1,59 | 1,51 | 1,60 | 1,99 | 2,93 | 3,02 | 3,07 | 2,96 | 2,73 | 2,40 | 3,07 | 70 |



ΔΥΝΑΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

| x | $v_1(x)$ | $v_2(x)$ | $v_3(x)$ | $v_4(x)$ |
|-----|----------|----------|----------|----------|
| 0 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 |
| 10 | 0,38 | 0,11 | 0,02 | 0,25 |
| 20 | 0,66 | 0,22 | 0,05 | 0,50 |
| 30 | 0,87 | 0,33 | 0,25 | 0,75 |
| 40 | 1,02 | 0,44 | 0,75 | 1,00 |
| 50 | 1,12 | 0,55 | 1,80 | 1,25 |
| 60 | 1,18 | 0,66 | 2,00 | 1,00 |
| 70 | 1,20 | 0,77 | 2,20 | 0,75 |
| 80 | 1,18 | 0,88 | 2,30 | 0,75 |
| 90 | 1,12 | 0,99 | 2,35 | 0,75 |
| 100 | 1,02 | 1,10 | 2,40 | 0,75 |

| $f_1(q)=\max A_1(q,x_1)$ | |
|--------------------------|------------|
| $f_1(q)$ | $x_1^*(q)$ |
| 0 | 0 |
| 0,38 | 10 |
| 0,66 | 20 |
| 0,87 | 30 |
| 1,02 | 40 |
| 1,12 | 50 |
| 1,18 | 60 |
| 1,20 | 70 |
| 1,20 | 70 |
| 1,20 | 70 |
| 1,20 | 70 |

| $f_2(q)=\max A_2(q,x_2)$ | |
|--------------------------|------------|
| $f_2(q)$ | $x_2^*(q)$ |
| 0 | 0 |
| 0,38 | 0 |
| 0,66 | 0 |
| 0,87 | 0 |
| 1,02 | 0 |
| 1,13 | 10 |
| 1,24 | 20 |
| 1,35 | 30 |
| 1,46 | 40 |
| 1,57 | 50 |
| 1,68 | 60 |

| $f_3(q)=\max A_3(q,x_3)$ | |
|--------------------------|------------|
| $f_3(q)$ | $x_3^*(q)$ |
| 0 | 0 |
| 0,38 | 0 |
| 0,66 | 0 |
| 0,87 | 0 |
| 1,02 | 0 |
| 1,80 | 50 |
| 2,18 | 50 |
| 2,46 | 50 |
| 2,67 | 50 |
| 2,87 | 60 |
| 3,07 | 70 |

| $q x_4$ | $A_4(q,x_4)=v_4(x_4)+f_3(q-x_4)$ | | | | | | | | | | | $f_4(q)=\max A_4(q,x_4)$ | |
|---------|----------------------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|--------------------------|------------|
| | 0 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 | $f_4(q)$ | $x_4^*(q)$ |
| 0 | 0,00 | | | | | | | | | | | 0 | 0 |
| 10 | 0,38 | 0,25 | | | | | | | | | | 0,38 | 0 |
| 20 | 0,66 | 0,63 | 0,50 | | | | | | | | | 0,66 | 0 |
| 30 | 0,87 | 0,91 | 0,88 | 0,75 | | | | | | | | 0,91 | 10 |
| 40 | 1,02 | 1,12 | 1,16 | 1,13 | 1,00 | | | | | | | 1,16 | 20 |
| 50 | 1,80 | 1,27 | 1,37 | 1,41 | 1,38 | 1,25 | | | | | | 1,80 | 0 |
| 60 | 2,18 | 2,05 | 1,52 | 1,62 | 1,66 | 1,63 | 1,00 | | | | | 2,18 | 0 |
| 70 | 2,46 | 2,43 | 2,30 | 1,77 | 1,87 | 1,91 | 1,38 | 0,75 | | | | 2,46 | 0 |
| 80 | 2,67 | 2,71 | 2,68 | 2,55 | 2,02 | 2,12 | 1,66 | 1,13 | 0,75 | | | 2,71 | 10 |
| 90 | 2,87 | 2,92 | 2,96 | 2,93 | 2,80 | 2,27 | 1,87 | 1,41 | 1,13 | 0,75 | | 2,96 | 20 |
| 100 | 3,07 | 3,12 | 3,17 | 3,21 | 3,18 | 3,05 | 2,02 | 1,62 | 1,41 | 1,13 | 0,75 | 3,21 | 30 |

● 4ος πίνακας Λύση: $x_4=30, x_3=50, x_2=0, x_1=20$





Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αλέξανδρος Π. Τσαούσογλου

Θεσσαλονίκη, 1,09.2015



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

