



Τοπογραφικά Δίκτυα & Υπολογισμοί

Ενότητα 6: Σχηματισμός κανονικών εξισώσεων και το πρόβλημα ορισμού του ΣΑ

Χριστόφορος Κωτσάκης
Τμήμα Αγρονόμων & Τοπογράφων Μηχανικών



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ



Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.





ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ



Σχηματισμός κανονικών εξισώσεων και το πρόβλημα ορισμού του Συστήματος Αναφοράς

Περιεχόμενα ενότητας

- Δημιουργία κανονικών εξισώσεων
- Το πρόβλημα της αδυναμίας βαθμού
- Η έννοια του “Ελεύθερου Δικτύου”



Σκοποί ενότητας

- **Δημιουργία του συστήματος κανονικών εξισώσεων και απαλοιφή αδιάφορων παραμέτρων. Αδυναμία βαθμού στην συνόρθωση δικτύων και η ανάγκη ορισμού του συστήματος αναφοράς για τις τελικές συντεταγμένες. Η έννοια και τα βασικά χαρακτηριστικά της λύσης “ελεύθερου δικτύου”.**



Τίτλος και Αρίθμηση (1/2)

1. Δημιουργία κανονικών εξισώσεων
2. Απαλοιφή πρόσθετων παραμέτρων
3. Κανονικές εξισώσεις δικτύου
4. Αδυναμία βαθμού δικτύου
5. Παράδειγμα
6. Λύση κανονικών εξισώσεων δικτύου



Τίτλος και Αρίθμηση (2/2)

7. Ελεύθερο δίκτυο
8. Αδυναμία βαθμού δικτύου
9. Συμπερασματικά
10. Παραδείγματα



Δημιουργία κανονικών εξισώσεων (1/3)

Σύστημα εξισώσεων παρατήρησης

$$\mathbf{b} = \mathbf{A}\delta\mathbf{x} + \mathbf{v} \quad \mathbf{v} \sim (\mathbf{0}, \sigma_o^2 \mathbf{P}^{-1})$$

Εφαρμογή κριτηρίου βελτιστοποίησης

$$\min_{\delta\mathbf{x}} \mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}$$

Σύστημα κανονικών εξισώσεων

$$\underbrace{(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})}_{\mathbf{N}} \delta\hat{\mathbf{x}} = \underbrace{\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{b}}_{\mathbf{u}}$$



Δημιουργία κανονικών εξισώσεων (2/3)

Σύστημα εξισώσεων παρατήρησης

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \tilde{\mathbf{A}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{x} \\ \delta \mathbf{q} \end{bmatrix} + \mathbf{v} \quad \mathbf{v} \sim (\mathbf{0}, \sigma_o^2 \mathbf{P}^{-1})$$

Εφαρμογή κριτηρίου βελτιστοποίησης

$$\min_{\delta \mathbf{x}, \delta \mathbf{q}} \mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}$$

Σύστημα κανονικών εξισώσεων

βλέπε επόμενη διαφάνεια



Δημιουργία κανονικών εξισώσεων (3/3)

Σύστημα εξισώσεων παρατήρησης

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \tilde{\mathbf{A}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{x} \\ \delta \mathbf{q} \end{bmatrix} + \mathbf{v} \quad \mathbf{v} \sim (\mathbf{0}, \sigma_o^2 \mathbf{P}^{-1})$$

Σύστημα κανονικών εξισώσεων

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} & \mathbf{A}^T \mathbf{P} \tilde{\mathbf{A}} \\ \hline \tilde{\mathbf{A}}^T \mathbf{P} \mathbf{A} & \tilde{\mathbf{A}}^T \mathbf{P} \tilde{\mathbf{A}} \end{array} \right] \begin{bmatrix} \delta \hat{\mathbf{x}} \\ \delta \hat{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{b} \\ \tilde{\mathbf{A}}^T \mathbf{P} \mathbf{b} \end{bmatrix}$$



Απαλοιφή πρόσθετων παραμέτρων

Σύστημα κανονικών εξισώσεων (αρχικό)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} \mathbf{N}_{\mathbf{xx}} & \mathbf{A} \mathbf{N}_{\mathbf{xq}} \\ \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{N}_{\mathbf{qx}} & \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{N}_{\mathbf{qq}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \hat{\mathbf{x}} \\ \delta \hat{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \mathbf{u}_{\mathbf{x}} \\ \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{u}_{\mathbf{q}} \end{bmatrix}$$

Σύστημα κανονικών εξισώσεων (ανηγμένο)

$$\left(\mathbf{N}_{\mathbf{xx}} - \mathbf{N}_{\mathbf{xq}} \mathbf{N}_{\mathbf{qq}}^{-1} \mathbf{N}_{\mathbf{qx}} \right) \delta \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{u}_{\mathbf{x}} - \mathbf{N}_{\mathbf{xq}} \mathbf{N}_{\mathbf{qq}}^{-1} \mathbf{u}_{\mathbf{q}}$$

Εκτίμηση πρόσθετων παραμέτρων

$$\delta \hat{\mathbf{q}} = \mathbf{N}_{\mathbf{qq}}^{-1} (\mathbf{u}_{\mathbf{q}} - \mathbf{N}_{\mathbf{qx}} \delta \hat{\mathbf{x}})$$



Κανονικές εξισώσεις δικτύου

- Κάθε πρόβλημα συνόρθωσης δικτύου καταλήγει σε ένα σύστημα κανονικών εξισώσεων της μορφής:

$$\mathbf{N} \delta \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{u}$$

- όπου $\delta \hat{\mathbf{x}}$ είναι το διάνυσμα των διορθώσεων των προσεγγιστικών συντεταγμένων όλων των κορυφών του δικτύου.

(*) το παραπάνω σύστημα **περιέχει** την πληροφορία των διαθέσιμων παρατηρήσεων για την εκτίμηση των συντ/νων του δικτύου καθώς και τα ποιοτικά χαρακτηριστικά τους σύμφωνα με τον επιλεγμένο πίνακα βάρους



Αδυναμία βαθμού δικτύου (1/2)

- Ο πίνακας \mathbf{N} των κανονικών εξισώσεων είναι γενικά μη-αντιστρέψιμος εξαιτίας της αδυναμίας βαθμού που υπάρχει σε κάθε πρόβλημα συνόρθωσης δικτύου:

$$\boxed{\mathbf{N} \delta \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{u}} \quad \det(\mathbf{N}) = 0$$

- Τι σημαίνει “αδυναμία βαθμού”;

$$\text{rank}(\mathbf{N}_{m \times m}) < m \quad \text{rank}(\mathbf{A}_{n \times m}) < m$$

Οι παρατηρήσεις δεν περιέχουν ικανή πληροφορία
άγνωστων παραμέτρων !

για την εκτίμηση των



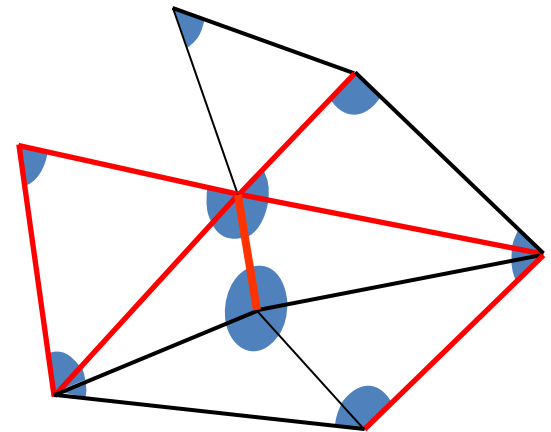
Αδυναμία βαθμού δικτύου (2/2)

- Που οφείλεται;
 - **Κύρια αιτία:** η αδυναμία των γεωδαιτικών και τοπογραφικών παρατηρήσεων να καθορίσουν το ΣΑ συντεταγμένων σε ένα δίκτυο
 - **Επιμέρους αιτίες** (βλέπε παραδείγματα στη συνέχεια)
 - αδυναμία γεωμετρικής μορφής δικτύου
 - αδυναμία αριθμού παρατηρήσεων



Παράδειγμα (1/3)

- Το σημείο A του παρακάτω δικτύου δεν μπορεί να προσδιοριστεί μέσω της συνόρθωσης λόγω “γεωμετρικής ανεπάρκειας” των διαθέσιμων παρατηρήσεων.



Σχήμα 1: Τυχαίο δίκτυο

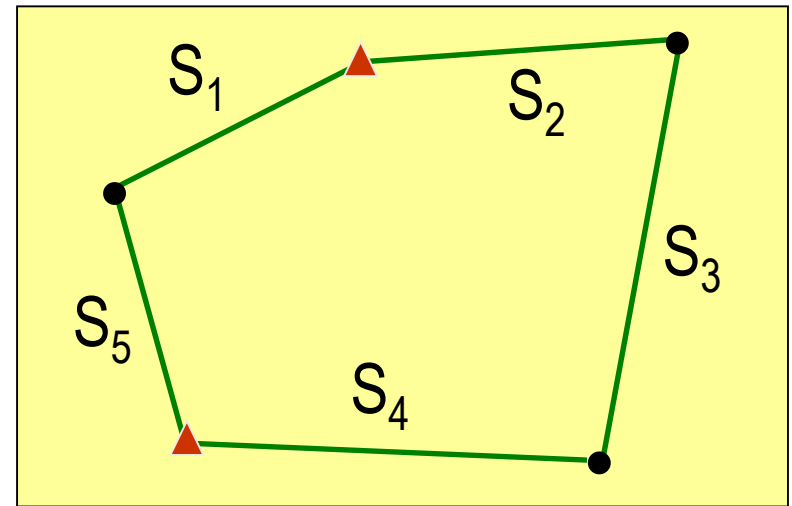
(*) κάθε άγνωστη κορυφή σε ένα οριζόντιο δίκτυο πρέπει να συνδέεται με γειτονικά σημεία μέσω τουλάχιστον 2 παρατηρήσεων



Παράδειγμα (2/3)

- οριζόντιο δίκτυο 5 σημείων
- 5 πλευρομετρήσεις
- κάθε κορυφή συνδέεται με το υπόλοιπο δίκτυο μέσω 2 παρατηρήσεων

(*) Ανεπαρκής αριθμός παρατηρήσεων



Σχήμα 2: Οριζόντιο δίκτυο 5 σημείων



Παράδειγμα (3/3)

Για τη συνέχεια θεωρούμε ότι το δίκτυο
δεν πάσχει από γεωμετρική ανεπάρκεια
ή ανεπαρκή αριθμό παρατηρήσεων



Λύση κανονικών εξισώσεων δικτύου (1/2)

- Εξαιτίας της αδυναμίας ορισμού του ΣΑ από τις διαθέσιμες παρατηρήσεις, το σύστημα των κανονικών εξισώσεων έχει **άπειρες λύσεις**.

$$\mathbf{N} \delta \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{u}$$

→

$$\begin{array}{l} \delta \hat{\mathbf{x}}_1 \quad \rightarrow \quad \hat{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{x}^0 + \delta \hat{\mathbf{x}}_1 \\ \delta \hat{\mathbf{x}}_2 \quad \rightarrow \quad \hat{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{x}^0 + \delta \hat{\mathbf{x}}_2 \\ \vdots \\ \delta \hat{\mathbf{x}}_1 \neq \delta \hat{\mathbf{x}}_2 \qquad \qquad \hat{\mathbf{x}}_1 \neq \hat{\mathbf{x}}_2 \end{array}$$

- Κάθε λύση των κανονικών εξισώσεων ενός δικτύου ονομάζεται **λύση ελεύθερου δικτύου** (free network solution)



Λύση κανονικών εξισώσεων δικτύου (2/2)

- Εξαιτίας της αδυναμίας ορισμού του ΣΑ από τις διαθέσιμες παρατηρήσεις, το σύστημα των κανονικών εξισώσεων έχει **άπειρες λύσεις**.

$$\mathbf{N} \delta \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{u}$$



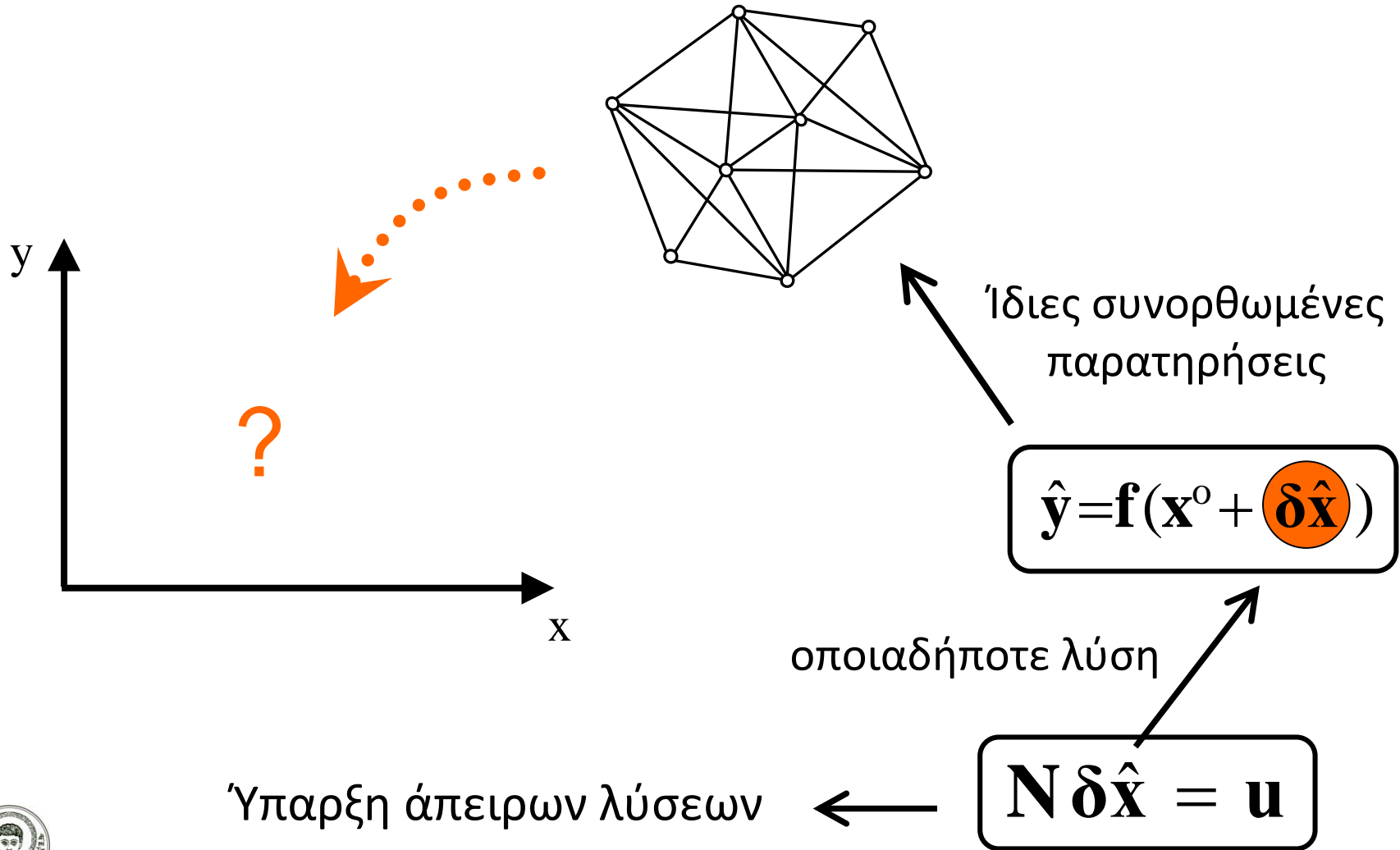
$$\begin{aligned} \delta \hat{\mathbf{x}}_1 &\longrightarrow \hat{\mathbf{y}}_1 = \mathbf{f}(\mathbf{x}^0 + \delta \hat{\mathbf{x}}_1) \\ \delta \hat{\mathbf{x}}_2 &\longrightarrow \hat{\mathbf{y}}_2 = \mathbf{f}(\mathbf{x}^0 + \delta \hat{\mathbf{x}}_2) \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

$\delta \hat{\mathbf{x}}_1 \neq \delta \hat{\mathbf{x}}_2$ $\hat{\mathbf{x}}_1 \neq \hat{\mathbf{x}}_2$

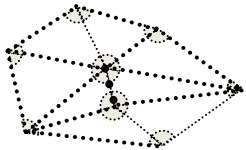
- Όλες οι λύσεις των κανονικών εξισώσεων είναι **ισοδύναμες μεταξύ τους** (οδηγούν στις ίδιες συνορθωμένες παρατηρήσεις).



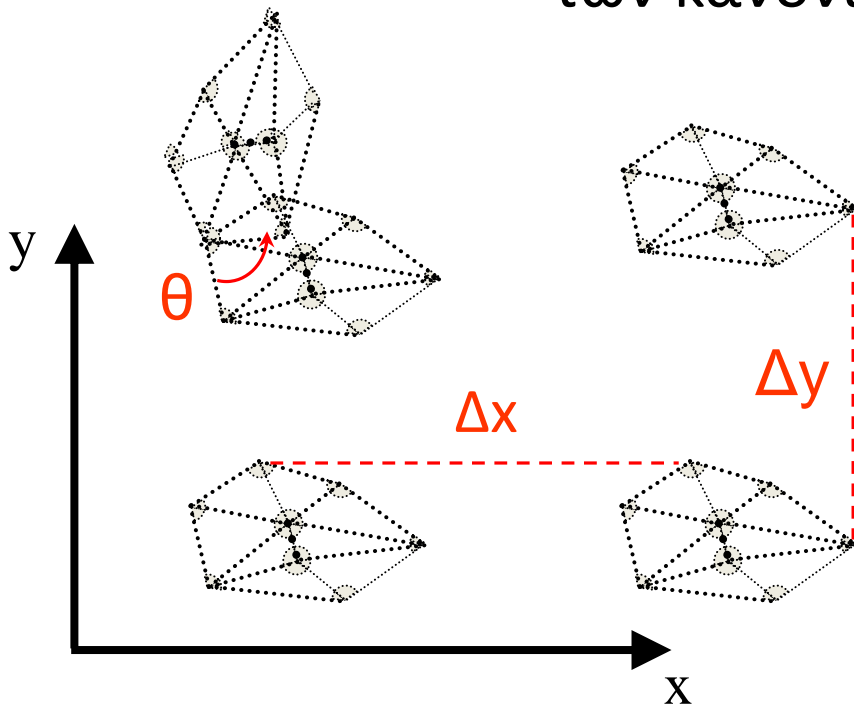
Ελεύθερο δίκτυο



Αδυναμία βαθμού δικτύου



Το “ελεύθερο δίκτυο” είναι αυτό που προσαρμόζεται καλύτερα στις παρατηρήσεις και προσδιορίζεται από οποιαδήποτε λύση των κανονικών εξισώσεων



Οι διαθέσιμες παρατηρήσεις σε ένα δίκτυο δεν περιέχουν πληροφορία για όλες τις παραμέτρους του συστήματος αναφοράς (Δx , Δy , θ)



Συμπερασματικά

- Η αδυναμία βαθμού ενός δικτύου σχετίζεται με την αδυναμία των παρατηρήσεων να προσδιορίσουν **την απόλυτη θέση & τον προσανατολισμό (και ίσως και την κλίμακα)** του δικτύου ως προς κάποιο σύστημα αναφοράς συντεταγμένων.
- Η αδυναμία βαθμού ενός δικτύου είναι ίση με τους “βαθμούς ελευθερίας” του δικτύου ως προς το σύστημα αναφοράς συντεταγμένων.

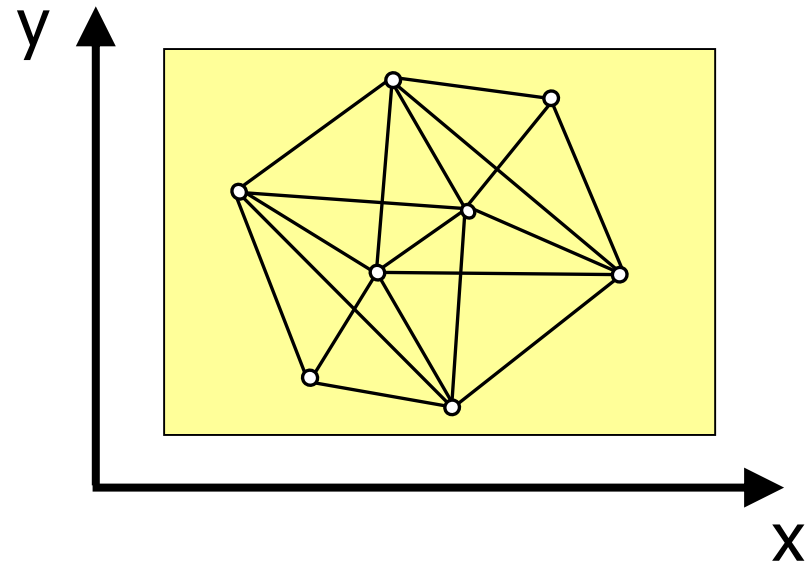


Παραδείγματα (1/6)

Αν σε ένα οριζόντιο τοπογραφικό δίκτυο N κορυφών έχω μετρήσει:

αποστάσεις

οριζόντιες γωνίες



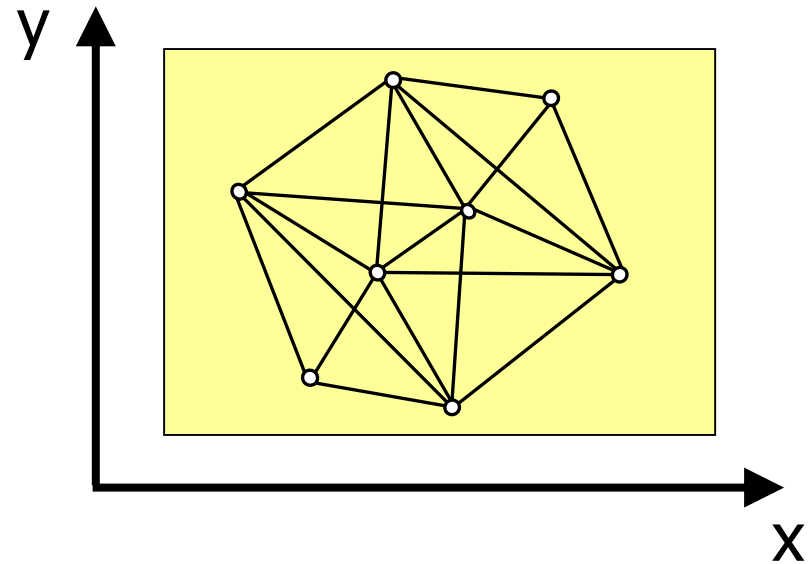
ποιά είναι η αδυναμία βαθμού του;



Παραδείγματα (2/6)

Αν σε ένα οριζόντιο τοπογραφικό δίκτυο N κορυφών έχω μετρήσει:

διαφορές συντεταγμένων,
δηλαδή τις 'συνιστώσες
βάσης' $\Delta x = (x_j - x_i)$ & $\Delta y = (y_j - y_i)$,
για όλες τις πλευρές



ποιά είναι η αδυναμία βαθμού του;



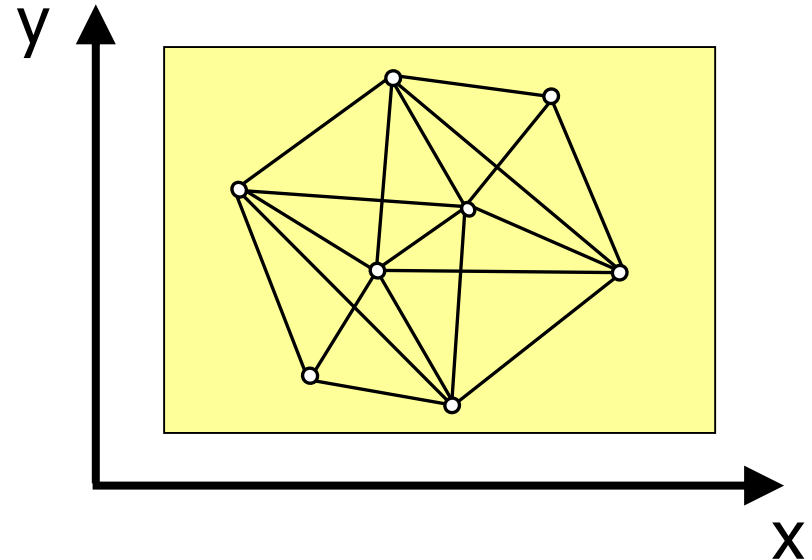
Παραδείγματα (3/6)

Αν σε ένα οριζόντιο τοπογραφικό δίκτυο N κορυφών έχω μετρήσει:

τις συντεταγμένες 'x' και 'y'
σε 1 συγκεκριμένο σημείο

αποστάσεις

οριζόντιες γωνίες



ποιά είναι η αδυναμία βαθμού του;



Παραδείγματα (4/6)

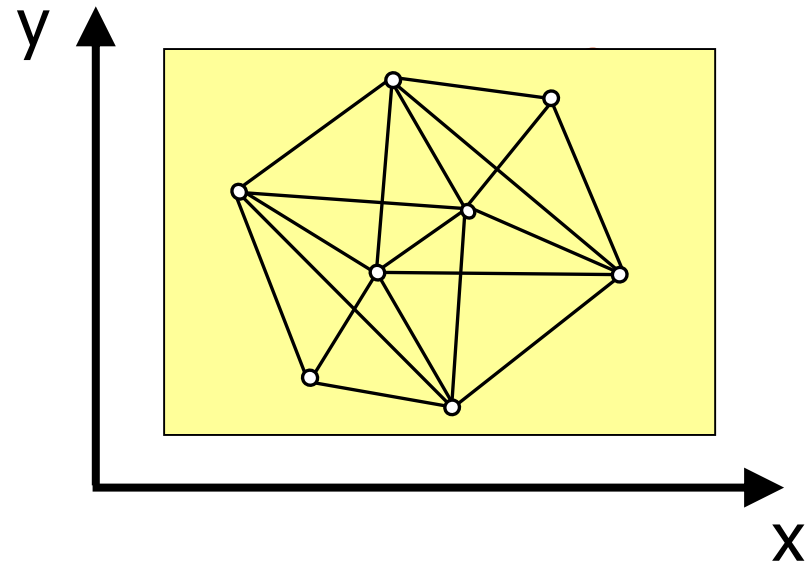
Αν σε ένα οριζόντιο τοπογραφικό δίκτυο N κορυφών έχω μετρήσει:

τις συντεταγμένες 'x'
σε 2 διαφορετικά σημεία

αποστάσεις

οριζόντιες γωνίες

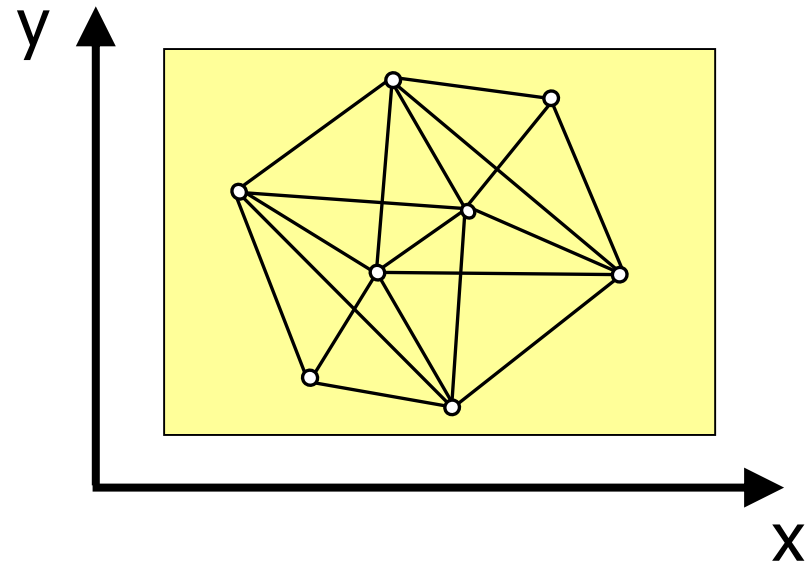
ποιά είναι η αδυναμία βαθμού του;



Παραδείγματα (5/6)

Αν σε ένα κατακόρυφο τοπογραφικό δίκτυο N κορυφών έχω μετρήσει:

υψομετρικές διαφορές



ποιά είναι η αδυναμία βαθμού του;



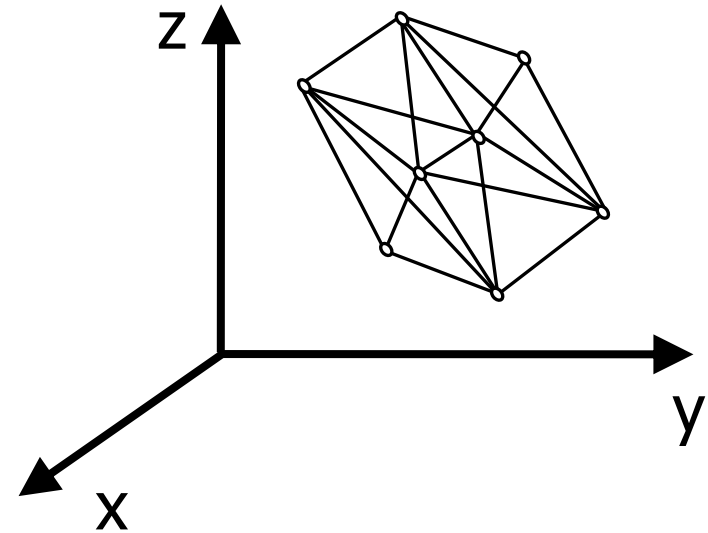
Παραδείγματα (6/6)

Αν σε ένα 3Δ τοπογραφικό δίκτυο N κορυφών έχω μετρήσει:

Ζενίθειες γωνίες

Κεκλιμένες αποστάσεις

Οριζόντιες γωνίες



ποιά είναι η αδυναμία βαθμού του;



Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (1/2)

- Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:
- Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες
- Εικόνα 1: <αναφορά><άδεια με την οποία διατίθεται> <σύνδεσμος><πηγή><κ.τ.λ>
- Εικόνα 2: <αναφορά><άδεια με την οποία διατίθεται> <σύνδεσμος><πηγή><κ.τ.λ>
- Εικόνα 3: <αναφορά><άδεια με την οποία διατίθεται> <σύνδεσμος><πηγή><κ.τ.λ>
- Εικόνα 4: <αναφορά><άδεια με την οποία διατίθεται> <σύνδεσμος><πηγή><κ.τ.λ>
- Εικόνα 5: <αναφορά><άδεια με την οποία διατίθεται> <σύνδεσμος><πηγή><κ.τ.λ>
- Εικόνα 6: <αναφορά><άδεια με την οποία διατίθεται> <σύνδεσμος><πηγή><κ.τ.λ>
- Εικόνα 7: <αναφορά><άδεια με την οποία διατίθεται> <σύνδεσμος>< πηγή><κ.τ.λ>



Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (2/2)

- Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:
- Πίνακες
- Πίνακας 1: <αναφορά><άδεια με την οποία διατίθεται> <σύνδεσμος><πηγή><κ.τ.λ>
- Πίνακας 2: <αναφορά><άδεια με την οποία διατίθεται> <σύνδεσμος><πηγή><κ.τ.λ>
- Πίνακας 3: <αναφορά><άδεια με την οποία διατίθεται> <σύνδεσμος><πηγή><κ.τ.λ>



Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Χριστόφορος Κωτσάκης, «Τοπογραφικά Δίκτυα & Υπολογισμοί, Σχηματισμός κανονικών εξισώσεων και το πρόβλημα ορισμού του Συστήματος Αναφοράς». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:
http://opencourses.auth.gr/eclass_courses.



Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά - Παρόμοια Διανομή [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>





Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Ευστάθιος Μπουχουράς
Θεσσαλονίκη,



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

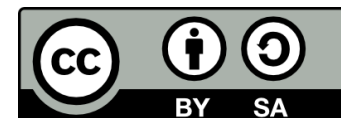


ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ





**ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ**

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.00.



Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

