ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

Χαραλάμπους Χαρά

Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2013

Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα. Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Σύνοψη

1 Ενότητα 0. Εισαγώγη

Στην ενότητα αυτή θα υπενθυμίσουμε γνώσεις επάνω στην επίλυση γραμμικών συστημάτων.

Γραμμικά Συστήματα

Για παράδειγμα, θεωρούμε το παρακάτω σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 2 \\ x_2 + 4x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Γραμμικά Συστήματα

Για παράδειγμα, θεωρούμε το παρακάτω σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 2 \\ x_2 + 4x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Σε αυτό το σύστημα αντιστοιχούν οι πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Το σύστημα μπορεί να περιγραφεί από την εξίσωση πινάκων

$$AX = B.$$

Το σύστημα μπορεί να περιγραφεί από την εξίσωση πινάκων

$$AX = B.$$

Αναζητούμε λύση του συστήματος, δηλαδή θέλουμε να περιγράψουμε το σύνολο

$$\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \colon AX = B\}.$$

Ας θεωρήσουμε τώρα το παρακάτω σύστημα

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= 1 \\
x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 2 \\
x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 0
\end{aligned}
$$

Ας θεωρήσουμε τώρα το παρακάτω σύστημα

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= 1 \\
x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 2 \\
x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 0
\end{aligned}
$$

Σε αυτό το σύστημα αντιστοιχούν οι πίνακες

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

Το σύστημα μπορεί να περιγραφεί από την εξίσωση πινάκων

$$AX = B.$$

Το σύστημα μπορεί να περιγραφεί από την εξίσωση πινάκων

$$AX = B.$$

Αναζητούμε λύση του συστήματος, δηλαδή θέλουμε να περιγράψουμε το σύνολο

$$\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \colon AX = B\}.$$

Αν

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

τότε ορίζουμε τον επαυξημένο πίνακα

$$[A|B] = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

Θα κάνουμε γραμμοπράξεις.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_2'=\Gamma_2-\Gamma 1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_2'=\Gamma_2-\Gamma 1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 3 \end{array}\right) \longrightarrow_{\Gamma_2'=\Gamma_2-\Gamma 1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow_{\Gamma_2 \leftrightarrow \Gamma_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & -4 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow_{\substack{\Gamma_3'=\Gamma_3+4\Gamma 2 \\ \Gamma_1'=\Gamma_1-2\Gamma 2}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -5 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 16 & 13 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\Gamma_2'=\Gamma_2-4\Gamma_3']{\Gamma_3'=\frac{\Gamma_3}{16}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -5 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{6}{16} & -\frac{4}{16} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{13}{16} & \frac{1}{16} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\Gamma_2'=\Gamma_2-4\Gamma_3']{\Gamma_3'=\frac{\Gamma_3}{16}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -5 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{6}{16} & -\frac{4}{16} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{13}{16} & \frac{1}{16} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\Gamma_2'=\Gamma_2-4\Gamma_3']{\Gamma_3'=\frac{\Gamma_3}{16}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{15}{16} & \frac{21}{16} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{6}{16} & -\frac{4}{16} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{13}{16} & \frac{1}{16} \end{array}\right)$$

Αυτή είναι η ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών του πίνακα $[A|B]$

Αυτός ο πίνακας αντιστοιχεί στο σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 - \frac{15}{16}x_4 &= \frac{21}{16} \\ x_2 + \frac{6}{16}x_4 &= -\frac{4}{16} \\ x_3 + \frac{13}{16}x_4 &= \frac{1}{16} \end{aligned}$$

Αυτός ο πίνακας αντιστοιχεί στο σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 - \frac{15}{16}x_4 &= \frac{21}{16} \\ x_2 + \frac{6}{16}x_4 &= -\frac{4}{16} \\ x_3 + \frac{13}{16}x_4 &= \frac{1}{16} \end{aligned}$$

Λύση του συστήματος ως προς x_1, x_2, x_3

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{21}{16} + \frac{15}{16}x_4 \\ x_2 &= -\frac{4}{16} - \frac{6}{16}x_4 \\ x_3 &= \frac{1}{16} - \frac{13}{16}x_4 \end{aligned}$$

Λύσεις του συστήματος

$$\{(\frac{21}{16}+\frac{15}{16}x_4, -\frac{4}{16}-\frac{6}{16}x_4, \frac{1}{16}-\frac{13}{16}x_4, x_4) : x_4 \in \mathbb{R}\}$$

Λύσεις του συστήματος

$$\{(\frac{21}{16}+\frac{15}{16}x_4, -\frac{4}{16}-\frac{6}{16}x_4, \frac{1}{16}-\frac{13}{16}x_4, x_4) : x_4 \in \mathbb{R}\}$$

Για $x_4 = 0$ βρίσκουμε τη λύση $(\frac{21}{16}, -\frac{4}{16}, \frac{1}{16}, 0)$

Λύσεις του συστήματος

$$\{(\frac{21}{16}+\frac{15}{16}x_4, -\frac{4}{16}-\frac{6}{16}x_4, \frac{1}{16}-\frac{13}{16}x_4, x_4) : x_4 \in \mathbb{R}\}$$

Για $x_4 = 0$ βρίσκουμε τη λύση $(\frac{21}{16}, -\frac{4}{16}, \frac{1}{16}, 0)$
Για $x_4 = 1$ βρίσκουμε τη λύση $(\frac{36}{16}, \frac{12}{16}, -\frac{12}{16}, 1)$

Λύσεις του συστήματος

$$\{(\frac{21}{16} + \frac{15}{16}x_4, -\frac{4}{16} - \frac{6}{16}x_4, \frac{1}{16} - \frac{13}{16}x_4, x_4) : x_4 \in \mathbb{R}\}$$

Για $x_4 = 0$ βρίσκουμε τη λύση $(\frac{21}{16}, -\frac{4}{16}, \frac{1}{16}, 0)$
Για $x_4 = 1$ βρίσκουμε τη λύση $(\frac{36}{16}, \frac{12}{16}, -\frac{12}{16}, 1)$
x_4 παράμετρος

Γενικά έχουμε ένα σύστημα με m εξισώσεις και n αγνώστους. A ο πίνακας των συντελεστών, B ο πίνακας των σταθερών.

Γενικά έχουμε ένα σύστημα με m εξισώσεις και n αγνώστους. A ο πίνακας των συντελεστών, B ο πίνακας των σταθερών. Θεωρούμε τον επαυξημένο πίνακα $[A|B]$ και κάνουμε γραμμοπράξεις ώσπου να καταλήξουμε στον πίνακα $[R, C]$, όπου ο R είναι σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών.

Γενικά έχουμε ένα σύστημα με m εξισώσεις και n αγνώστους. A ο πίνακας των συντελεστών, B ο πίνακας των σταθερών. Θεωρούμε τον επαυξημένο πίνακα $[A|B]$ και κάνουμε γραμμοπράξεις ώσπου να καταλήξουμε στον πίνακα $[R, C]$, όπου ο R είναι σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών. Στον πίνακα R αντιστοιχεί ένα νέο ισοδύναμο γραμμικό σύστημα, λύνουμε ως προς τις μεταβλητές που αντιστοιχούν στις καθοδηγητικές μονάδες.

Γενικά έχουμε ένα σύστημα με m εξισώσεις και n αγνώστους. A ο πίνακας των συντελεστών, B ο πίνακας των σταθερών. Θεωρούμε τον επαυξημένο πίνακα $[A|B]$ και κάνουμε γραμμοπράξεις ώσπου να καταλήξουμε στον πίνακα $[R, C]$, όπου ο R είναι σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών. Στον πίνακα R αντιστοιχεί ένα νέο ισοδύναμο γραμμικό σύστημα, λύνουμε ως προς τις μεταβλητές που αντιστοιχούν στις καθοδηγητικές μονάδες.
Περιγράφουμε το σύνολο των λύσεων.

Γενικά έχουμε ένα σύστημα με m εξισώσεις και n αγνώστους.
A ο πίνακας των συντελεστών, B ο πίνακας των σταθερών.
Θεωρούμε τον επαυξημένο πίνακα $[A|B]$ και κάνουμε γραμμοπράξεις ώσπου να καταλήξουμε στον πίνακα $[R, C]$, όπου ο R είναι σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών.
Στον πίνακα R αντιστοιχεί ένα νέο ισοδύναμο γραμμικό σύστημα, λύνουμε ως προς τις μεταβλητές που αντιστοιχούν στις καθοδηγητικές μονάδες.
Περιγράφουμε το σύνολο των λύσεων.
Ερώτημα: έχουμε πάντα λύσεις;

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Dr. Φωτιάδης Ανέστης

Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2013-14

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης