ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

Χαραλάμπους Χαρά

Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2013

Αριστοτέλειο
Πανεπιστήμιο
Θεσσαλονίκης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα. Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Σύνοψη

1. Ενότητα 1. Επίλυση Γραμμικών συστημάτων
   - Κριτήριο συμβατότητας
   - Εύρεση του A^{-1} και της λύσης
   - Συμπεράσματα
   - Κανόνας του *Cramer*

Σε αυτή την ενότητα μιλάμε για Γραμμικά συστήματα: μέθοδος εύρεσης λύσεων, Γραφή συνόλου λύσεων, μη συμβατά συστήματα $Null(A)$, $Ker(f)$ και $Null(A)$, $Im(f)$ και επίλυση γραμμικών συστημάτων, Μέθοδος του *Cramer*, σημεία σε μία καμπύλη.

Κριτήριο συμβατότητας

Θεωρούμε το σύστημα

$$AX = B,$$

Όπου A, X και B πίνακες $m \times n$, $n \times 1$ και $m \times 1$ αντίστοιχα.

Κριτήριο συμβατότητας

Θεωρούμε το σύστημα

$$AX = B,$$

Όπου A, X και B πίνακες $m \times n$, $n \times 1$ και $m \times 1$ αντίστοιχα.

$[A|B] \to \cdots \to [C|D]$, ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή

Κριτήριο συμβατότητας

Θεωρούμε το σύστημα

$$AX = B,$$

Όπου A, X και B πίνακες $m \times n$, $n \times 1$ και $m \times 1$ αντίστοιχα.

$[A|B] \to \cdots \to [C|D]$, ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή

Μη συμβατό όταν $rank(A) < rank([A|B])$

Ειδική περίπτωση

Έστω A $n \times n$ πίνακας, οπότε έχουμε n εξισώσεις και n αγνώστους.

Ειδική περίπτωση

Έστω A $n \times n$ πίνακας, οπότε έχουμε n εξισώσεις και n αγνώστους.

A αντιστρέψιμος $\Leftrightarrow det(A) \neq 0$

Ειδική περίπτωση

Έστω A $n \times n$ πίνακας, οπότε έχουμε n εξισώσεις και n αγνώστους.

A αντιστρέψιμος $\Leftrightarrow$ $det(A) \neq 0$

Αν A αντιστρέψιμος τότε $[A|B] \to \cdots \to [I_n|D]$, ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή

Ειδική περίπτωση

Έστω A $n \times n$ πίνακας, οπότε έχουμε n εξισώσεις και n αγνώστους.

A αντιστρέψιμος $\Leftrightarrow det(A) \neq 0$

Αν A αντιστρέψιμος τότε $[A|B] \to \cdots \to [I_n|D]$, ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή

Άρα, $AX = B$ συμβατό και έχει μοναδική λύση.

Αν A αντιστρέψιμος τότε $[A|B] \to \cdots \to [C|D]$, ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή, όπου $C = \begin{pmatrix} * \\ O \end{pmatrix}$

Αν A αντιστρέψιμος τότε $[A|B] \to \cdots \to [C|D]$, ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή, όπου $C = \begin{pmatrix} * \\ O \end{pmatrix}$

Άρα, αν $AX = B$ συμβατό τότε έχει άπειρες λύσεις.

Παράδειγμα

Έστω $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Τότε $ker(f) \leftrightsquigarrow null(A)$

Παράδειγμα

Έστω $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Τότε $ker(f) \leftrightsquigarrow null(A)$

Αν A αντιστρέψιμος τότε $ker(f_A) = (0, 0, \ldots, 0) = O$ και $Im(f_A) = \mathbb{R}^n$

Παράδειγμα

Έστω $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Τότε $ker(f) \leftrightsquigarrow null(A)$

Αν A αντιστρέψιμος τότε $ker(f_A) = (0, 0, \ldots, 0) = O$ και $Im(f_A) = \mathbb{R}^n$

Αν A μη αντιστρέψιμος τότε $Im(f_A) \neq \mathbb{R}^n$ και $ker(f_A) \neq O$

Παράδειγμα

Έστω $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Τότε $ker(f) \leftrightsquigarrow null(A)$

Αν A αντιστρέψιμος τότε $ker(f_A) = (0, 0, \ldots, 0) = O$ και $Im(f_A) = \mathbb{R}^n$

Αν A μη αντιστρέψιμος τότε $Im(f_A) \neq \mathbb{R}^n$ και $ker(f_A) \neq O$

Αν $det(A) \neq 0$ τότε το σύστημα $AX = B$ έχει μοναδική λύση $X = A^{-1}B$

Εφαρμογή

Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Θα λύσουμε το σύστημα $AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Έχουμε $det(A) = -2 \neq 0$ και άρα A αντιστρέψιμος.

Εφαρμογή

Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Θα λύσουμε το σύστημα $AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Έχουμε $det(A) = -2 \neq 0$ και άρα A αντιστρέψιμος.

Αρκεί να βρούμε τον πίνακα A^{-1}. Τότε η ζητούμενη λύση θα είναι $Q = A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Εύρεση του A^{-1} και της λύσης

Χαραλάμπους Χαρά

$$\left(\begin{array}{cc|c|cc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Εύρεση του A^{-1} και της λύσης

$$\left(\begin{array}{cc|c|cc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{}_{\Gamma_2'=\Gamma_2-3\Gamma 1} \left(\begin{array}{cc|c|cc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

Εύρεση του A^{-1} και της λύσης

Χαραλάμπους Χαρά

$$\left(\begin{array}{cc|c|cc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\Gamma_2'=\Gamma_2-3\Gamma 1} \left(\begin{array}{cc|c|cc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\Gamma_1'=\Gamma_1-2\Gamma 2']{\Gamma_2'=\frac{\Gamma_2}{-2}} \left(\begin{array}{cc|c|cc} 1 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Εύρεση του A^{-1} και της λύσης

$$\left(\begin{array}{cc|c|cc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\Gamma_2'=\Gamma_2-3\Gamma 1} \left(\begin{array}{cc|c|cc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\Gamma_1'=\Gamma_1-2\Gamma 2']{\Gamma_2'=\frac{\Gamma_2}{-2}} \left(\begin{array}{cc|c|cc} 1 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Άρα $x_1 = -1, x_2 = 1$ και $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Συμπεράσματα

Θεωρούμε την $f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f_A(a, b) = (a + 2b, 3a + 4b)$

Συμπεράσματα

Θεωρούμε την $f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f_A(a,b) = (a+2b, 3a+4b)$

$Ker(f_A) = O$

Συμπεράσματα

Θεωρούμε την $f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f_A(a, b) = (a + 2b, 3a + 4b)$

$Ker(f_A) = O$

$f(-1, 1) = (1, 1)$

Κανόνας του *Cramer*

$$x_i = \frac{det(A(i,B))}{det(A)},$$

Κανόνας του *Cramer*

$$x_i = \frac{det(A(i,B))}{det(A)},$$

όπου $A(i,B) =$ ίδιος με τον πίνακα A όπου στη στήλη i έχουμε B

Κανόνας του *Cramer*

$$x_i = \frac{det(A(i,B))}{det(A)},$$

όπου $A(i,B) =$ ίδιος με τον πίνακα A όπου στη στήλη i έχουμε B

π.χ. αν $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Κανόνας του *Cramer*

$$x_i = \frac{det(A(i,B))}{det(A)},$$

όπου $A(i,B) =$ ίδιος με τον πίνακα A όπου στη στήλη i έχουμε B

π.χ. αν $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ τότε $A(1,B) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ και $A(2,B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$,

Κανόνας του *Cramer*

$$x_i = \frac{det(A(i,B))}{det(A)},$$

όπου $A(i,B)$ = ίδιος με τον πίνακα A όπου στη στήλη i έχουμε B

π.χ. αν $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ τότε $A(1,B) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ και $A(2,B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $det(A(1,B)) = 2$ και $det(A(2,B)) = -2$.

Κανόνας του *Cramer*

$$x_i = \frac{det(A(i,B))}{det(A)},$$

όπου $A(i,B) =$ ίδιος με τον πίνακα A όπου στη στήλη i έχουμε B

π.χ. αν $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ τότε $A(1,B) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ και $A(2,B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $det(A(1,B)) = 2$ και $det(A(2,B)) = -2$. Άρα $x_1 = \frac{2}{-2} = -1$ και $x_2 = \frac{-2}{-2} = 1$

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Dr. Φωτιάδης Ανέστης

Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2013-14

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης