ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ II

Χαραλάμπους Χαρά

Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2013

Αριστοτέλειο
Πανεπιστήμιο
Θεσσαλονίκης

Χρηματοδότηση

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα. Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Σύνοψη

Σε αυτή την ενότητα μιλάμε για Γραμμικά συστήματα: μέθοδος εύρεσης λύσεων, Γραφή συνόλου λύσεων, μη συμβατά συστήματα $Null(A)$, $Ker(f)$ και $Null(A)$, $Im(f)$ και επίλυση γραμμικών συστημάτων, Μέθοδος του *Cramer*, σημεία σε μία καμπύλη.

Εφαρμογή

Να βρεθεί καμπύλη που διέρχεται από τα σημεία $(0, -1), (1, 1), (2, 1)$.

Εφαρμογή

Να βρεθεί καμπύλη που διέρχεται από τα σημεία $(0,-1),(1,1),(2,1)$.

Δεν υπάρχει ευθεία που να διέρχεται από τα παραπάνω σημεία.

Εφαρμογή

Να βρεθεί καμπύλη που διέρχεται από τα σημεία $(0, -1), (1, 1), (2, 1)$.

Δεν υπάρχει ευθεία που να διέρχεται από τα παραπάνω σημεία.Θα αναζητήσουμε να βρούμε καμπύλη της μορφής $Y = ax^2 + bx + c$. Αρκεί να βρούμε τα a, b, c.

Εφαρμογή

Να βρεθεί καμπύλη που διέρχεται από τα σημεία $(0,-1),(1,1),(2,1)$.

Δεν υπάρχει ευθεία που να διέρχεται από τα παραπάνω σημεία.Θα αναζητήσουμε να βρούμε καμπύλη της μορφής $Y = ax^2 + bx + c$. Αρκεί να βρούμε τα a, b, c.

Άρα καταλήγουμε στο σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{aligned} a + b + c &= 1 \\ 4a + 2b + c &= 1 \\ 0a + 0b + c &= -1 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\Gamma_2'=\Gamma_2-4\Gamma 1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\Gamma_2'=\Gamma_2-4\Gamma1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\Gamma_1'=\Gamma_1+3\Gamma3]{\Gamma_2'=\Gamma_2+3\Gamma3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\Gamma_1'=\Gamma_1-\Gamma 2']{\Gamma_2'=\frac{\Gamma_2}{-2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

Άρα, $a = \frac{5}{3}, b = \frac{1}{3}, c = -1$ και η ζητούμενη καμπύλη είναι η $Y = \frac{5}{3}x^2 + \frac{1}{3}x - 1$

$$\xrightarrow[\Gamma_1' = \Gamma_1 - \Gamma 2']{\Gamma_2' = \frac{\Gamma_2}{-2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

Άρα, $a = \frac{5}{3}, b = \frac{1}{3}, c = -1$ και η ζητούμενη καμπύλη είναι η $Y = \frac{5}{3}x^2 + \frac{1}{3}x - 1$

Ερώτημα: Υπάρχει καμπύλη της μορφής $Y = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ που να διέρχεται από τα τρία δοθέντα σημεία;

$$\xrightarrow[\Gamma_1'=\Gamma_1-\Gamma 2']{\Gamma_2'=\frac{\Gamma_2}{-2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Άρα, $a = \frac{5}{3}, b = \frac{1}{3}, c = -1$ και η ζητούμενη καμπύλη είναι η $Y = \frac{5}{3}x^2 + \frac{1}{3}x - 1$

Ερώτημα: Υπάρχει καμπύλη της μορφής $Y = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ που να διέρχεται από τα τρία δοθέντα σημεία;
Το σύστημα είναι συμβατό αφού έχει μια λύση την $(0, \frac{5}{3}, \frac{1}{3}, -1)$.

$$\xrightarrow[\Gamma_1'=\Gamma_1-\Gamma 2']{\Gamma_2'=\frac{\Gamma_2}{-2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Άρα, $a = \frac{5}{3}, b = \frac{1}{3}, c = -1$ και η ζητούμενη καμπύλη είναι η $Y = \frac{5}{3}x^2 + \frac{1}{3}x - 1$

Ερώτημα: Υπάρχει καμπύλη της μορφής $Y = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ που να διέρχεται από τα τρία δοθέντα σημεία;
Το σύστημα είναι συμβατό αφού έχει μια λύση την $(0, \frac{5}{3}, \frac{1}{3}, -1)$.
Αν A ο πίνακας του συστήματος τότε $rank(A) \geq 3$ και $rank(A) \leq 3$ άρα $rank(A) = 3$ και το σύστημα είναι πράγματι συμβατό.

Εφαρμογές

Πίνακας του *Vandermonde*

$$A = \begin{pmatrix} x_1^n & x_1^{n-1} & \dots & x_1 & 1 \\ x_2^n & x_2^{n-1} & \dots & x_2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n+1}^n & x_{n+1}^{n-1} & \dots & x_{n+1} & 1 \end{pmatrix}$$

Αν $x_i \neq x_j, i \neq j$, τότε $det(A) \neq 0$.

Εφαρμογές

Πρόβλημα: Δίνεται $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 22 \\ 2 & 2 & 55 \\ 0 & 0 & 33 \end{pmatrix}$ που αντιστοιχεί στη γραμμική συνάρτηση f_A. Να βρεθεί η f_A και $Im(f_A)$

Εφαρμογές

Πρόβλημα: Δίνεται $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 22 \\ 2 & 2 & 55 \\ 0 & 0 & 33 \end{pmatrix}$ που αντιστοιχεί στη γραμμική συνάρτηση f_A. Να βρεθεί η f_A και $Im(f_A)$

Είναι $f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, με
$f_A(x, y, z) = (x + y + 22z, 2x + 2y + 55z, 33z)$.

Εφαρμογές

Πρόβλημα: Δίνεται $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 22 \\ 2 & 2 & 55 \\ 0 & 0 & 33 \end{pmatrix}$ που αντιστοιχεί στη γραμμική συνάρτηση f_A. Να βρεθεί η f_A και $Im(f_A)$

Είναι $f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, με
$f_A(x, y, z) = (x + y + 22z, 2x + 2y + 55z, 33z)$.

Είναι $(a, b, c) \in Im(f_A)$ ανν $AX = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ συμβατό.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 22 & a \\ 2 & 2 & 55 & b \\ 0 & 0 & 33 & c \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 22 & a \\ 2 & 2 & 55 & b \\ 0 & 0 & 33 & c \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\Gamma_3'=\frac{\Gamma_3}{33}]{\Gamma_2'=\Gamma_2-2\Gamma 1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 22 & a \\ 0 & 0 & 11 & b-2a \\ 0 & 0 & 1 & \frac{c}{33} \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 22 & a \\ 2 & 2 & 55 & b \\ 0 & 0 & 33 & c \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\Gamma_3'=\frac{\Gamma_3}{33}]{\Gamma_2'=\Gamma_2-2\Gamma 1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 22 & a \\ 0 & 0 & 11 & b-2a \\ 0 & 0 & 1 & \frac{c}{33} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\Gamma_2'=\Gamma_2-11\Gamma 3']{\Gamma_3'=\frac{\Gamma_3}{33}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 22 & a \\ 0 & 0 & 0 & b-2a-\frac{c}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{c}{33} \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 22 & a \\ 2 & 2 & 55 & b \\ 0 & 0 & 33 & c \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\Gamma_3'=\frac{\Gamma_3}{33}]{\Gamma_2'=\Gamma_2-2\Gamma 1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 22 & a \\ 0 & 0 & 11 & b-2a \\ 0 & 0 & 1 & \frac{c}{33} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\Gamma_2'=\Gamma_2-11\Gamma 3']{\Gamma_3'=\frac{\Gamma_3}{33}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 22 & a \\ 0 & 0 & 0 & b-2a-\frac{c}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{c}{33} \end{array}\right)$$

Για να είναι το σύστημα συμβατό πρέπει $b-2a-\frac{c}{3}=0$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 22 & | & a \\ 2 & 2 & 55 & | & b \\ 0 & 0 & 33 & | & c \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\Gamma_3'=\frac{\Gamma_3}{33}]{\Gamma_2'=\Gamma_2-2\Gamma 1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 22 & | & a \\ 0 & 0 & 11 & | & b-2a \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{c}{33} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\Gamma_2'=\Gamma_2-11\Gamma 3']{\Gamma_3'=\frac{\Gamma_3}{33}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 22 & | & a \\ 0 & 0 & 0 & | & b-2a-\frac{c}{3} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{c}{33} \end{pmatrix}$$

Για να είναι το σύστημα συμβατό πρέπει $b-2a-\frac{c}{3}=0$. Συνεπώς, $Im(f_A)=\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3 : 3b-6a-c=0\}$ διανυσματικός χώρος.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 22 & a \\ 2 & 2 & 55 & b \\ 0 & 0 & 33 & c \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\Gamma_3'=\frac{\Gamma_3}{33}]{\Gamma_2'=\Gamma_2-2\Gamma 1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 22 & a \\ 0 & 0 & 11 & b-2a \\ 0 & 0 & 1 & \frac{c}{33} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\Gamma_2'=\Gamma_2-11\Gamma 3']{\Gamma_3'=\frac{\Gamma_3}{33}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 22 & a \\ 0 & 0 & 0 & b-2a-\frac{c}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{c}{33} \end{array}\right)$$

Για να είναι το σύστημα συμβατό πρέπει $b-2a-\frac{c}{3}=0$.
Συνεπώς, $Im(f_A)=\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3 : 3b-6a-c=0\}$ διανυσματικός χώρος.Βάση: $(1,0,-6),(0,1,3)$

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Dr. Φωτιάδης Ανέστης

Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2013-14

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης