ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

Χαραλάμπους Χαρά

Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2013

Αριστοτέλειο
Πανεπιστήμιο
Θεσσαλονίκης

Χαραλάμπους Χαρά

Ενότητα 2. Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα

Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα

Παράδειγμα

Άδειες Χρήσης

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons. Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα. Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Σύνοψη

Στην ενότητα αυτή μελετάμε Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα, Αλγόριθμος εύρεσης, Γραφική απεικόνιση Ιδιοδιανυσμάτων, Ιδιοτιμές αντιστρόφου και αναστρόφου και δυνάμεων πίνακα, χαρακτηριστικό πολυώνυμο, όμοιοι πίνακες και ιδιοτιμές

Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα

Έστω A, $n \times n$ πίνακας, $A \in M_n(\mathbb{R})$. Να βρεθούν αν υπάρχουν διανύσματα $X \neq O$ έτσι ώστε για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ να έχουμε $AQ = \lambda X$

Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα

Έστω A, $n \times n$ πίνακας, $A \in M_n(\mathbb{R})$. Να βρεθούν αν υπάρχουν διανύσματα $X \neq O$ έτσι ώστε για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ να έχουμε $AQ = \lambda X$

Ισοδύναμα, έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n)$. Να βρεθούν αν υπάρχουν $v \neq O$ έτσι ώστε για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ να έχουμε $f(v) = \lambda v$

Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα

Έστω A, $n \times n$ πίνακας, $A \in M_n(\mathbb{R})$. Να βρεθούν αν υπάρχουν διανύσματα $X \neq O$ έτσι ώστε για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ να έχουμε $AQ = \lambda X$

Ισοδύναμα, έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n)$. Να βρεθούν αν υπάρχουν $v \neq O$ έτσι ώστε για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ να έχουμε $f(v) = \lambda v$

Τότε λέμε $v \neq O$ ιδιοδιάνυσμα της f και λ ιδιοτιμή της f.

Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα

Έστω A, $n \times n$ πίνακας, $A \in M_n(\mathbb{R})$. Να βρεθούν αν υπάρχουν διανύσματα $X \neq O$ έτσι ώστε για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ να έχουμε $AQ = \lambda X$

Ισοδύναμα, έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n)$. Να βρεθούν αν υπάρχουν $v \neq O$ έτσι ώστε για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ να έχουμε $f(v) = \lambda v$

Τότε λέμε $v \neq O$ ιδιοδιάνυσμα της f και λ ιδιοτιμή της f. Αντίστοιχα, λέμε $X \neq O$ ιδιοδιάνυσμα του A και λ ιδιοτιμή του A

Παράδειγμα

Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ και $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(a,b) = (a+2b, 2a+4b)$. Αναζητούμε ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα.

Παράδειγμα

Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ και $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(a,b) = (a+2b, 2a+4b)$. Αναζητούμε ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \neq O,\ x_1 + 2x_2 = \lambda x_1,\ 2x_1 + 4x_2 = \lambda x_2$$

Παράδειγμα

Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ και
$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(a,b) = (a+2b, 2a+4b)$. Αναζητούμε ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα.

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \neq O$, $x_1 + 2x_2 = \lambda x_1$, $2x_1 + 4x_2 = \lambda x_2$
Άρα έχουμε το ομογενές σύστημα

$$\begin{aligned} (1-\lambda)x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 2x_1 + (4-\lambda)x_2 &= 0. \end{aligned}$$

Παράδειγμα

Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ και $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(a, b) = (a + 2b, 2a + 4b)$. Αναζητούμε ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα.

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \neq O$, $x_1 + 2x_2 = \lambda x_1$, $2x_1 + 4x_2 = \lambda x_2$

Άρα έχουμε το ομογενές σύστημα

$$\begin{aligned} (1 - \lambda)x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 2x_1 + (4 - \lambda)x_2 &= 0. \end{aligned}$$

Υπάρχουν μη μηδενικές λύσεις; Ποιές είναι;

Υπάρχει $X \neq O$ λύση ανν $det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{pmatrix} = 0$

Υπάρχει $X \neq O$ λύση ανν $det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{pmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow \lambda^2 - 5\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0, \lambda = 5$ ιδιοτιμές

Υπάρχει $X \neq O$ λύση ανν $det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{pmatrix} = 0$
$\Leftrightarrow \lambda^2 - 5\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0, \lambda = 5$ ιδιοτιμές

Για $\lambda = 0$ έχουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 &= 0. \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow^{\Gamma_2' = \Gamma_2 - 2\Gamma 1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Υπάρχει $X \neq O$ λύση ανν $det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{pmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow \lambda^2 - 5\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0, \lambda = 5$ ιδιοτιμές

Για $\lambda = 0$ έχουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 0 \\ 2 & 4 & | & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow_{\Gamma_2' = \Gamma_2 - 2\Gamma 1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Λύσεις $\{x_2(-2, 1) : x_2 \in \mathbb{R}\}$, ιδιοδιανύσματα.

Για $\lambda = 5$ έχουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} -4x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 &= 0. \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\Gamma_1' = \frac{\Gamma_1}{-4}]{\Gamma_2' = \Gamma_2 + 2\Gamma 1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Για $\lambda = 5$ έχουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} -4x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 &= 0. \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\Gamma_1' = \frac{\Gamma_1}{-4}]{\Gamma_2' = \Gamma_2 + 2\Gamma 1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Λύσεις $\{x_2(\frac{1}{2}, 1) : x_2 \in \mathbb{R}\}$, ιδιοδιανύσματα.

1. $A - \lambda I$

1. $A - \lambda I$2. $det(A - \lambda I)$

1. $A - \lambda I$2. $det(A - \lambda I)$3. $det(A - \lambda I) = 0$, λύνουμε ως προς

λ

1. $A - \lambda I$2. $det(A - \lambda I)$3. $det(A - \lambda I) = 0$, λύνουμε ως προς

λ4. Για κάθε λύση λ βρίσκουμε τον μηδενοχώρο $null(A - \lambda I)$

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Dr. Φωτιάδης Ανέστης

Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2013-14

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

cc BY SA