ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

Χαραλάμπους Χαρά

Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2013

Αριστοτέλειο
Πανεπιστήμιο
Θεσσαλονίκης

Χρηματοδότηση

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα. Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.

ανοικτάμαθήματα opencourses

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Σύνοψη

1 Ενότητα 3. Διαγωνιοποίηση
- Διαγωνιοποίηση πινάκων

Στην ενότητα αυτή μελετούνται Ιδιοχώροι, Αλγεβρική και Γεωμετρική Πολλαπλότητα, Ανεξαρτησία Ιδιοδιανυσμάτων για διαφορετικές ιδιοτιμές, Διαγωνιοποίηση, Εφαρμογές: πρόβλημα κυνηγού+λείας,

Διαγωνιοποίηση πινάκων

Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας, και V_1, V_2 ιδιοδιάνυσμα με ιδιοτιμές $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Διαγωνιοποίηση πινάκων

Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας, και V_1, V_2 ιδιοδιάνυσμα με ιδιοτιμές $\lambda_1 \neq \lambda_2$.
Πρόταση: Τα V_1, V_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητα

Διαγωνιοποίηση πινάκων

Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας, και V_1, V_2 ιδιοδιάνυσμα με ιδιοτιμές $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Πρόταση: Τα V_1, V_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητα

Έστω ότι

$$k_1 V_1 + k_2 V_2 = O \tag{1}$$

Διαγωνιοποίηση πινάκων

Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας, και V_1, V_2 ιδιοδιάνυσμα με ιδιοτιμές $\lambda_1 \neq \lambda_2$.
Πρόταση: Τα V_1, V_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητα
Έστω ότι

$$k_1 V_1 + k_2 V_2 = O \tag{1}$$

Πολλαπλασιάζουμε από τα αριστερά με τον πίνακα A:

Διαγωνιοποίηση πινάκων

Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας, και V_1, V_2 ιδιοδιάνυσμα με ιδιοτιμές $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Πρόταση: Τα V_1, V_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητα

Έστω ότι

$$k_1 V_1 + k_2 V_2 = O \tag{1}$$

Πολλαπλασιάζουμε από τα αριστερά με τον πίνακα A:

$$k_1 A V_1 + k_2 A V_2 = O \Rightarrow k_1 \lambda_1 V_1 + k_2 \lambda_2 V_2 = O \tag{2}$$

Διαγωνιοποίηση πινάκων

Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας, και V_1, V_2 ιδιοδιάνυσμα με ιδιοτιμές $\lambda_1 \neq \lambda_2$.
Πρόταση: Τα V_1, V_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητα
Έστω ότι

$$k_1 V_1 + k_2 V_2 = O \tag{1}$$

Πολλαπλασιάζουμε από τα αριστερά με τον πίνακα A:

$$k_1 A V_1 + k_2 A V_2 = O \Rightarrow k_1 \lambda_1 V_1 + k_2 \lambda_2 V_2 = O \tag{2}$$

Δεδομένου ότι $\lambda_1 \neq \lambda_2$, από τις παραπάνω σχέσεις (1) και (2) βρίσκουμε $k_1 = k_2 = 0$, αφού $V_1, V_2 \neq O$. Άρα V_1, V_2 γραμμικά ανεξάρτητα

Γενίκευση

Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας, και $V_1, V_2, \ldots V_m$ ιδιοδιάνυσμα με ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_m$ ιδιοτιμές, με $\lambda_i \neq \lambda_j$ για $i \neq j$.

Γενίκευση

Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας, και $V_1, V_2, \ldots V_m$ ιδιοδιάνυσμα με ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_m$ ιδιοτιμές, με $\lambda_i \neq \lambda_j$ για $i \neq j$.

Θεώρημα: Τα $V_1, V_2, \ldots V_m$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα

Γενίκευση

Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας, και $V_1, V_2, \ldots V_m$ ιδιοδιάνυσμα με ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_m$ ιδιοτιμές, με $\lambda_i \neq \lambda_j$ για $i \neq j$.

Θεώρημα: Τα $V_1, V_2, \ldots V_m$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα
Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή ως προς $m \in \mathbb{N}$

Για $m = 1$ το θεώρημα ισχύει αφού $V_1 \neq O$. Έστω ότι το θεώρημα ισχύει για $m-1$, δηλαδήΓια $m = 1$ το θεώρημα ισχύει αφού $V_1 \neq O$. Έστω ότι το θεώρημα ισχύει για $m-1$, δηλαδή αν $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_{m-1}$ διαφορετικές τότε τα ιδιοτιμές $V_1, V_2, \ldots V_{m-1}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.
Έστω $V_1, V_2, \ldots V_m$ ιδιοδιάνυσμα με ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_m$ ιδιοτιμές, με $\lambda_i \neq \lambda_j$ για $i \neq j$. Αν

$$k_1 V_1 + k_2 V_2 + \ldots k_m V_m = O \tag{3}$$

Πολλαπλασιάζουμε από τα αριστερά με τον πίνακα A:

Πολλαπλασιάζουμε από τα αριστερά με τον πίνακα A:

$$\begin{gathered} k_1AV_1 + k_2AV_2 \ldots k_mAV_m = O \Rightarrow \\ k_1\lambda_1V_1 + k_2\lambda_2V_2 + \ldots k_m\lambda_mV_m = O \end{gathered} \tag{4}$$

Πολλαπλασιάζουμε από τα αριστερά με τον πίνακα A:

$$\begin{aligned} k_1 AV_1 + k_2 AV_2 \dots k_m AV_m = O \Rightarrow \\ k_1 \lambda_1 V_1 + k_2 \lambda_2 V_2 + \dots k_m \lambda_m V_m = O \end{aligned} \tag{4}$$

Δεδομένου ότι $\lambda_i \neq \lambda_j$ για $i \neq j$, από τις παραπάνω σχέσεις (1) και (2) και την επαγωγική υπόθεση βρίσκουμε $k_1 = k_2 = \dots = k_m = 0$, αφού $V_1, V_2, \dots, V_m \neq O$. Άρα $V_1, V_2, \dots, V_m$ γραμμικά ανεξάρτητα

Θέλουμε να δείξουμε ότι λ είναι ιδιοτιμή του A.

Θέλουμε να δείξουμε ότι λ είναι ιδιοτιμή του A.

Πρώτος τρόπος: Να δείξουμε ότι υπάρχει $v \neq O$ έτσι ώστε $Av = \lambda v$

Θέλουμε να δείξουμε ότι λ είναι ιδιοτιμή του A.

Πρώτος τρόπος: Να δείξουμε ότι υπάρχει $v \neq O$ έτσι ώστε $Av = \lambda v$

Δεύτερος τρόπος: Να δείξουμε ότι $det(A - \lambda I) = 0$

Πρόταση: Αν λ είναι ιδιοτιμή του A και A αντιστρέψιμος τότε το λ^{-1} είναι ιδιοτιμή του A^{-1}

Πρόταση: Αν λ είναι ιδιοτιμή του A και A αντιστρέψιμος τότε το λ^{-1} είναι ιδιοτιμή του A^{-1}

λ ιδιοτιμή του A
$\Rightarrow \exists v \neq O : Av = \lambda v$

Πρόταση: Αν λ είναι ιδιοτιμή του A και A αντιστρέψιμος τότε το λ^{-1} είναι ιδιοτιμή του A^{-1}

λ ιδιοτιμή του A
$\Rightarrow \exists v \neq O : Av = \lambda v \Rightarrow \exists v \neq O : A^{-1}Av = A^{-1}(\lambda v)$

Πρόταση: Αν λ είναι ιδιοτιμή του A και A αντιστρέψιμος τότε το λ^{-1} είναι ιδιοτιμή του A^{-1}

λ ιδιοτιμή του A
$\Rightarrow \exists v \neq O : Av = \lambda v \Rightarrow \exists v \neq O : A^{-1}Av = A^{-1}(\lambda v)$
$\Rightarrow \exists v \neq O : v = \lambda A^{-1} v$

Πρόταση: Αν λ είναι ιδιοτιμή του A και A αντιστρέψιμος τότε το λ^{-1} είναι ιδιοτιμή του A^{-1}

λ ιδιοτιμή του A
$\Rightarrow \exists v \neq O : Av = \lambda v \Rightarrow \exists v \neq O : A^{-1}Av = A^{-1}(\lambda v)$
$\Rightarrow \exists v \neq O : v = \lambda A^{-1} v$
$\Rightarrow \exists v \neq O : A^{-1} v = \lambda^{-1} v$
Παρατήρηση: $\exists A^{-1} \Rightarrow det(A) \neq 0 \Rightarrow \lambda \neq 0$

Πρόταση: Αν λ είναι ιδιοτιμή του A και A αντιστρέψιμος τότε το λ^{-1} είναι ιδιοτιμή του A^{-1}

Πρόταση: Αν λ είναι ιδιοτιμή του A και A αντιστρέψιμος τότε το λ^{-1} είναι ιδιοτιμή του A^{-1}

λ ιδιοτιμή του A
$\Rightarrow \exists v \neq O : Av = \lambda v$

Πρόταση: Αν λ είναι ιδιοτιμή του A και A αντιστρέψιμος τότε το λ^{-1} είναι ιδιοτιμή του A^{-1}

λ ιδιοτιμή του A
$\Rightarrow \exists v \neq O : Av = \lambda v \Rightarrow \exists v \neq O : A^{-1}Av = A^{-1}(\lambda v)$

Πρόταση: Αν λ είναι ιδιοτιμή του A και A αντιστρέψιμος τότε το λ^{-1} είναι ιδιοτιμή του A^{-1}

λ ιδιοτιμή του A
$\Rightarrow \exists v \neq O : Av = \lambda v \Rightarrow \exists v \neq O : A^{-1}Av = A^{-1}(\lambda v)$
$\Rightarrow \exists v \neq O : v = \lambda A^{-1} v$

Πρόταση: Αν λ είναι ιδιοτιμή του A και A αντιστρέψιμος τότε το λ^{-1} είναι ιδιοτιμή του A^{-1}

λ ιδιοτιμή του A
$\Rightarrow \exists v \neq O : Av = \lambda v \Rightarrow \exists v \neq O : A^{-1}Av = A^{-1}(\lambda v)$
$\Rightarrow \exists v \neq O : v = \lambda A^{-1} v$
$\Rightarrow \exists v \neq O : A^{-1} v = \lambda^{-1} v$
Παρατήρηση: $\exists A^{-1} \Rightarrow det(A) \neq 0 \Rightarrow \lambda \neq 0$

Πρόταση: Αν λ είναι ιδιοτιμή του A και A αντιστρέψιμος τότε το λ^{-1} είναι ιδιοτιμή του A^{-1}

Πρόταση: Αν λ είναι ιδιοτιμή του A και A αντιστρέψιμος τότε το λ^{-1} είναι ιδιοτιμή του A^{-1}

λ ιδιοτιμή του A
$\Rightarrow \exists v \neq O : Av = \lambda v$

Πρόταση: Αν λ είναι ιδιοτιμή του A και A αντιστρέψιμος τότε το λ^{-1} είναι ιδιοτιμή του A^{-1}

λ ιδιοτιμή του A
$\Rightarrow \exists v \neq O : Av = \lambda v \Rightarrow \exists v \neq O : A^{-1}Av = A^{-1}(\lambda v)$

Πρόταση: Αν λ είναι ιδιοτιμή του A και A αντιστρέψιμος τότε το λ^{-1} είναι ιδιοτιμή του A^{-1}

λ ιδιοτιμή του A
$\Rightarrow \exists v \neq O : Av = \lambda v \Rightarrow \exists v \neq O : A^{-1}Av = A^{-1}(\lambda v)$
$\Rightarrow \exists v \neq O : v = \lambda A^{-1} v$

Πρόταση: Αν λ είναι ιδιοτιμή του A και A αντιστρέψιμος τότε το λ^{-1} είναι ιδιοτιμή του A^{-1}

λ ιδιοτιμή του A

$\Rightarrow \exists v \neq O : Av = \lambda v \Rightarrow \exists v \neq O : A^{-1}Av = A^{-1}(\lambda v)$

$\Rightarrow \exists v \neq O : v = \lambda A^{-1} v$

$\Rightarrow \exists v \neq O : A^{-1} v = \lambda^{-1} v$

Παρατήρηση: $\exists A^{-1} \Rightarrow det(A) \neq 0 \Rightarrow \lambda \neq 0$

Πρόταση: Αν λ είναι ιδιοτιμή του A τότε το λ είναι ιδιοτιμή και του A^T

Πρόταση: Αν λ είναι ιδιοτιμή του A τότε το λ είναι ιδιοτιμή και του A^T

λ ιδιοτιμή του $A \Rightarrow det(A - \lambda I) = 0$

Πρόταση: Αν λ είναι ιδιοτιμή του A τότε το λ είναι ιδιοτιμή και του A^T

λ ιδιοτιμή του $A \Rightarrow det(A - \lambda I) = 0$
$\Rightarrow det(A - \lambda I)^T = 0$

Πρόταση: Αν λ είναι ιδιοτιμή του A τότε το λ είναι ιδιοτιμή και του A^T

λ ιδιοτιμή του $A \Rightarrow det(A - \lambda I) = 0$
$\Rightarrow det(A - \lambda I)^T = 0$
$\Rightarrow det(A^T - \lambda I^T) = 0$

Πρόταση: Αν λ είναι ιδιοτιμή του A τότε το λ είναι ιδιοτιμή και του A^T

λ ιδιοτιμή του $A \Rightarrow det(A - \lambda I) = 0$
$\Rightarrow det(A - \lambda I)^T = 0$
$\Rightarrow det(A^T - \lambda I^T) = 0$
$\Rightarrow det(A^T - \lambda I) = 0$
Παρατήρηση: $det(B^T) = det(B)$

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Dr. Φωτιάδης Ανέστης

Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2013-14

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης