ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

Χαραλάμπους Χαρά

Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2013

Αριστοτέλειο
Πανεπιστήμιο
Θεσσαλονίκης

Χρηματοδότηση

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα. Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Σύνοψη

Στην ενότητα αυτή μελετούνται Ιδιοχώροι, Αλγεβρική και Γεωμετρική Πολλαπλότητα, Ανεξαρτησία Ιδιοδιανυσμάτων για διαφορετικές ιδιοτιμές, Διαγωνιοποίηση, Εφαρμογές: πρόβλημα κυνηγού+λείας,

Γραμμικοί μετασχηματισμοί

Έστω $f : \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n) \to \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$ γραμμική απεικόνιση. Καθορίζουμε δυο βάσεις B, B' του $\mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$. Τότε, ο πίνακας της f ως προς τη βαση B είναι όμοιος με τον πίνακα της f ως προς τη βάση B'

Γραμμικοί μετασχηματισμοί

Έστω $f : \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n) \to \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$ γραμμική απεικόνιση. Καθορίζουμε δυο βάσεις B, B' του $\mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$. Τότε, ο πίνακας της f ως προς τη βαση B είναι όμοιος με τον πίνακα της f ως προς τη βάση B'

Συμπέρασμα: Οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα μιας γραμμικής συνάρτησης είναι ανεξάρτητες από τη βάση που επιλέγουμε για τον πίνακα της γραμμικής συνάρτησης.

Αν $A = (a_{ij})$ είναι $n \times n$ πίνακας τότε $P_A(x) = det(A - \lambda x)$ είναι πολυώνυμο βαθμού n.

Αν $A = (a_{ij})$ είναι $n \times n$ πίνακας τότε $P_A(x) = det(A - \lambda x)$ είναι πολυώνυμο βαθμού n.

Συγκεκριμένα, είναι
$P_A(x) = (-1)^n x^n + (-1)^{n-1} tr(A) x^{n-1} \cdots + det(A)$, όπου
$tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$

Αν $A = (a_{ij})$ είναι $n \times n$ πίνακας τότε $P_A(x) = det(A - \lambda x)$ είναι πολυώνυμο βαθμού n.

Συγκεκριμένα, είναι
$P_A(x) = (-1)^n x^n + (-1)^{n-1} tr(A) x^{n-1} \cdots + det(A)$, όπου
$tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$

Άρα, ο σταθερός όρος του $P_A(x)$ είναι $det(A)$ ενώ ο συντελεστής του x^{n-1} είναι το $(-1)^{n-1} tr(A)$

Αν $A = (a_{ij})$ είναι $n \times n$ πίνακας τότε $P_A(x) = det(A - \lambda x)$ είναι πολυώνυμο βαθμού n.

Συγκεκριμένα, είναι
$P_A(x) = (-1)^n x^n + (-1)^{n-1} tr(A) x^{n-1} \cdots + det(A)$, όπου
$tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$

Άρα, ο σταθερός όρος του $P_A(x)$ είναι $det(A)$ ενώ ο συντελεστής του x^{n-1} είναι το $(-1)^{n-1} tr(A)$

Αν A, B όμοιοι πίνακες τότε έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο και συνεπώς $det(A) = det(B)$ και $tr(A) = tr(B)$

Άσκηση

Έστω $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & 1-a & 2i \\ i & c+1 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$, με $det(A) = 8$ και μια ιδιοτιμή $\lambda_1 = 2$. Να βρεθούν οι άλλες δύο ιδιοτιμές λ_2, λ_3 του A.

Άσκηση

Έστω $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & 1-a & 2i \\ i & c+1 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$, με $det(A) = 8$ και μια ιδιοτιμή $\lambda_1 = 2$. Να βρεθούν οι άλλες δύο ιδιοτιμές λ_2, λ_3 του A.

Ο πίνακας A έχει τρείς μιγαδικές ιδιοτιμές. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι
$P_A(x) = -(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)(x-\lambda_3)$.

Άσκηση

Έστω $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & 1-a & 2i \\ i & c+1 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$, με $det(A) = 8$ και μια ιδιοτιμή $\lambda_1 = 2$. Να βρεθούν οι άλλες δύο ιδιοτιμές λ_2, λ_3 του A.

Ο πίνακας A έχει τρείς μιγαδικές ιδιοτιμές. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι
$P_A(x) = -(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)(x-\lambda_3)$.
Άρα $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = det(A) = 8 \Rightarrow \lambda_2\lambda_3 = 4$,
$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = tr(A) = a + 1 - a + 1 = 2 \Rightarrow \lambda_2 + \lambda_3 = 0$
Συνεπώς, $\lambda_3 = 2i$ και $\lambda_2 = -2i (\lambda_2 = 2i$ και $\lambda_3 = -2i)$, άρα το σύνολο των ιδιοτιμών είναι $2, 2i, -2i$

Άσκηση

Έστω A διαγωνιοποιήσιμος πίνακας με ιδιοτιμές $1, i, -i$. Να υπολογιστούν οι πίνακες A^4, A^5.

Άσκηση

Έστω A διαγωνιοποιήσιμος πίνακας με ιδιοτιμές $1, i, -i$. Να υπολογιστούν οι πίνακες A^4, A^5.

Λύση: Αφού ο A είναι διαγωνιοποιήσιμος πίνακας με ιδιοτιμές $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = i, \lambda_3 = -i$ τότε υπάρχει πίνακας P (του οποίου οι στήλες είναι τα ιδιοδιανύσματα του A) έτσι ώστε ο πίνακας $P^{-1}AP$ να είναι διαγώνιος πίνακας με διαγώνια στοιχεία τις ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

Άσκηση

Έστω A διαγωνιοποιήσιμος πίνακας με ιδιοτιμές $1, i, -i$. Να υπολογιστούν οι πίνακες A^4, A^5.

Λύση: Αφού ο A είναι διαγωνιοποιήσιμος πίνακας με ιδιοτιμές $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = i, \lambda_3 = -i$ τότε υπάρχει πίνακας P (του οποίου οι στήλες είναι τα ιδιοδιανύσματα του A) έτσι ώστε ο πίνακας $P^{-1}AP$ να είναι διαγώνιος πίνακας με διαγώνια στοιχεία τις ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.
Έχουμε $A = PDP^{-1}$ άρα $A^4 = PD^4P^{-1}$.

Άσκηση

Έστω A διαγωνιοποιήσιμος πίνακας με ιδιοτιμές $1, i, -i$. Να υπολογιστούν οι πίνακες A^4, A^5.

Λύση: Αφού ο A είναι διαγωνιοποιήσιμος πίνακας με ιδιοτιμές $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = i, \lambda_3 = -i$ τότε υπάρχει πίνακας P (του οποίου οι στήλες είναι τα ιδιοδιανύσματα του A) έτσι ώστε ο πίνακας $P^{-1}AP$ να είναι διαγώνιος πίνακας με διαγώνια στοιχεία τις ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.
Έχουμε $A = PDP^{-1}$ άρα $A^4 = PD^4P^{-1}$.Γενικότερα, $A^m = PD^mP^{-1}, \forall m \in \mathbb{N}$.

Άσκηση

Έστω A διαγωνιοποιήσιμος πίνακας με ιδιοτιμές $1, i, -i$. Να υπολογιστούν οι πίνακες A^4, A^5.

Λύση: Αφού ο A είναι διαγωνιοποιήσιμος πίνακας με ιδιοτιμές $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = i, \lambda_3 = -i$ τότε υπάρχει πίνακας P (του οποίου οι στήλες είναι τα ιδιοδιανύσματα του A) έτσι ώστε ο πίνακας $P^{-1}AP$ να είναι διαγώνιος πίνακας με διαγώνια στοιχεία τις ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.
Έχουμε $A = PDP^{-1}$ άρα $A^4 = PD^4P^{-1}$.Γενικότερα, $A^m = PD^mP^{-1}, \forall m \in \mathbb{N}$. Αλλά ο πίνακας D^4 είναι ο διαγώνιος πίνακας με στοιχεία της διαγωνίου τα $\lambda_1^4 = 1, \lambda_2^4 = 1, \lambda_3^4 = 1$, δηλαδή $D^4 = I$.

Άσκηση

Έστω A διαγωνιοποιήσιμος πίνακας με ιδιοτιμές $1, i, -i$. Να υπολογιστούν οι πίνακες A^4, A^5.

Λύση: Αφού ο A είναι διαγωνιοποιήσιμος πίνακας με ιδιοτιμές $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = i, \lambda_3 = -i$ τότε υπάρχει πίνακας P (του οποίου οι στήλες είναι τα ιδιοδιανύσματα του A) έτσι ώστε ο πίνακας $P^{-1}AP$ να είναι διαγώνιος πίνακας με διαγώνια στοιχεία τις ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.
Έχουμε $A = PDP^{-1}$ άρα $A^4 = PD^4P^{-1}$.Γενικότερα, $A^m = PD^mP^{-1}, \forall m \in \mathbb{N}$. Αλλά ο πίνακας D^4 είναι ο διαγώνιος πίνακας με στοιχεία της διαγωνίου τα $\lambda_1^4 = 1, \lambda_2^4 = 1, \lambda_3^4 = 1$, δηλαδή $D^4 = I$. Συνεπώς $A^4 = PD^4P^{-1} = PP^{-1} = I$ και $A^5 = A^4A = A$

Άσκηση

Θεωρούμε την απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (2x + y, y - z, 2y + 4z)$. Είναι ο πίνακας της διαγωνιοποιήσιμος;

Άσκηση

Θεωρούμε την απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (2x + y, y - z, 2y + 4z)$. Είναι ο πίνακας της διαγωνιοποιήσιμος;

Λύση: Θεωρούμε την κανονική βάση και συνεπώς ο πίνακας της f είναι ο

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Άσκηση

Θεωρούμε την απεικόνιση
$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, f(x,y,z) = (2x+y, y-z, 2y+4z)$. Είναι ο πίνακας της διαγωνιοποιήσιμος;

Λύση: Θεωρούμε την κανονική βάση και συνεπώς ο πίνακας της f είναι ο

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο
$P_A(x) = det(A - xI) = -(x-2)^2(x-3)$
Άρα έχουμε ιδιοτιμές $x = 2$(αλγεβρική πολλαπλότητα 2) και $x = 3$(αλγεβρική πολλαπλότητα 1)

Άσκηση

Θεωρούμε την απεικόνιση
$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (2x + y, y - z, 2y + 4z)$. Είναι ο πίνακας της διαγωνιοποιήσιμος;

Λύση: Θεωρούμε την κανονική βάση και συνεπώς ο πίνακας της f είναι ο

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο
$P_A(x) = det(A - xI) = -(x-2)^2(x-3)$
Άρα έχουμε ιδιοτιμές $x = 2$(αλγεβρική πολλαπλότητα 2) και $x = 3$(αλγεβρική πολλαπλότητα 1)
$V_2(A) = \{x(1, 1, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ μονοδιάστατος και $V_3(A)$ μονοδιάστατος ομοίως.

Άρα ο A δεν είναι διαγωνιοποιήσιμος. Πράγματι, για να είναι διαγωνιοποιήσιμος πρέπει να έχει τρία γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα. Αλλά αυτό δεν είναι δυνατό αφού $V_2(A)$, $V_3(A)$ μονοδιάστατοι.

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Dr. Φωτιάδης Ανέστης

Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2013-14

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης