ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

Χαραλάμπους Χαρά

Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2013

Αριστοτέλειο
Πανεπιστήμιο
Θεσσαλονίκης

Χαραλάμπους Χαρά

Ενότητα 4. Θεώρημα των *Cayley – Hamilton*

Χρηματοδότηση

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα. Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Σύνοψη

1 Ενότητα 4. Θεώρημα των *Cayley – Hamilton*

Στην ενότητα αυτή θα μελετηθεί το Θεώρημα των *Cayley – Hamilton* και εφαρμογές του.

Θεωρούμε τον πίνακα $A \in M_n(\mathbb{R})$

Έστω η γεωμετρική πολλαπλότητα $= s$ και αλγεβρική πολλαπλότητα $= t$

Θεωρούμε τον πίνακα $A \in M_n(\mathbb{R})$
Έστω η γεωμετρική πολλαπλότητα $= s$ και αλγεβρική πολλαπλότητα $= t$
Τότε μπορούμε να βρούμε μια βάση $\{v_1, \ldots, v_s\}$ του ιδιοχώρο $V_\lambda(A)$. Προσθέτουμε διανύσματα ώστε να πάρουμε μια βάση $\{v_1, \ldots, v_s, w_1, \ldots, w_{n-s}\}$ του $\mathbb{R}^n$.

Θεωρούμε τον πίνακα $A \in M_n(\mathbb{R})$
Έστω η γεωμετρική πολλαπλότητα $= s$ και αλγεβρική πολλαπλότητα $= t$
Τότε μπορούμε να βρούμε μια βάση $\{v_1, \ldots, v_s\}$ του ιδιοχώρο $V_\lambda(A)$. Προσθέτουμε διανύσματα ώστε να πάρουμε μια βάση $\{v_1, \ldots, v_s, w_1, \ldots, w_{n-s}\}$ του $\mathbb{R}^n$.

Αν $P = [v_1, \ldots, v_s, w_1, \ldots, w_{n-s}]$ τότε P αντιστρέψιμος $n \times n$ πίνακας. Θεωρούμε τον πίνακα $B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda I_s & \Gamma \\ O & \Delta \end{pmatrix}$.

Θεωρούμε τον πίνακα $A \in M_n(\mathbb{R})$
Έστω η γεωμετρική πολλαπλότητα $= s$ και αλγεβρική πολλαπλότητα $= t$
Τότε μπορούμε να βρούμε μια βάση $\{v_1, \ldots, v_s\}$ του ιδιοχώρο $V_\lambda(A)$. Προσθέτουμε διανύσματα ώστε να πάρουμε μια βάση $\{v_1, \ldots, v_s, w_1, \ldots, w_{n-s}\}$ του $\mathbb{R}^n$.

Αν $P = [v_1, \ldots, v_s, w_1, \ldots, w_{n-s}]$ τότε P αντιστρέψιμος $n \times n$ πίνακας. Θεωρούμε τον πίνακα $B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda I_s & \Gamma \\ O & \Delta \end{pmatrix}$.
Άρα $P_A(x) = P_B(x) = (x - \lambda)^s f(x)$ συνεπώς $s \leq t$ από τον ορισμό της αλγεβρικής πολλαπλότητας t

Παράδειγμα

Έστω A ένας 4×4 πίνακας με χαρακτηριστικό πολυώνυμο το $P_A(x) = (x-3)^2(x-4)(x-2)$

Παράδειγμα

Έστω A ένας 4×4 πίνακας με χαρακτηριστικό πολυώνυμο το $P_A(x) = (x-3)^2(x-4)(x-2)$
Έχουμε τις ιδιοτιμές 4, 2, 3 με αντίστοιχη αλγεβρική πολλαπλότητα 1, 1, 2.

Παράδειγμα

Έστω A ένας 4×4 πίνακας με χαρακτηριστικό πολυώνυμο το $P_A(x) = (x-3)^2(x-4)(x-2)$

Έχουμε τις ιδιοτιμές 4, 2, 3 με αντίστοιχη αλγεβρική πολλαπλότητα 1, 1, 2.

Αφού γεωμετρική πολλαπλότητα $\leq$ αλγεβρική πολλαπλότητα συμπεραίνουμε ότι

$1 \leq dim(V_4(A)) \leq 1, 1 \leq dim(V_2(A)) \leq 1,$

$1 \leq dim(V_3(A)) \leq 2$

Παράδειγμα

Έστω A ένας 4×4 πίνακας με χαρακτηριστικό πολυώνυμο το $P_A(x) = (x-3)^2(x-4)(x-2)$
Έχουμε τις ιδιοτιμές 4, 2, 3 με αντίστοιχη αλγεβρική πολλαπλότητα 1, 1, 2.
Αφού γεωμετρική πολλαπλότητα $\leq$ αλγεβρική πολλαπλότητα συμπεραίνουμε ότι
$1 \leq dim(V_4(A)) \leq 1, 1 \leq dim(V_2(A)) \leq 1,$
$1 \leq dim(V_3(A)) \leq 2$
Άρα, $dim(V_4(A)) = dim(V_2(A)) = 1$ και ο πίνακας A είναι διαγωνιοποιήσιμος τότε και μόνο τότε όταν $dim(V_3(A)) = 2$.

Για παράδειγμα $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ είναι ένας τέτοιος πίνακας.

Ένα παράδειγμα ενός 4×4 πίνακας A με χαρακτηριστικό πολυώνυμο το $P_A(x) = (x-3)^2(x-4)(x-2)$ με $dim(V_3(A)) = 1$ είναι ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Ισχύει ότι $dim(V_3(A)) = 1$.

Συνήθες εσωτερικό γινόμενο στον $V = \mathbb{C}^n$

Εσωτερικό γινόμενο: $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$

Συνήθες εσωτερικό γινόμενο στον $V = \mathbb{C}^n$

Εσωτερικό γινόμενο: $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$
Έστω $v = (a_1, \ldots, a_n), w = (b_1, \ldots, b_n)$,

Συνήθες εσωτερικό γινόμενο στον $V = \mathbb{C}^n$

Εσωτερικό γινόμενο: $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$
Έστω $v = (a_1, \ldots, a_n), w = (b_1, \ldots, b_n)$, τότε ορίζουμε
$\langle v, w \rangle = \langle (a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n) \rangle =$
$v_1\overline{w_1} + v_2\overline{w_2} + \ldots v_n\overline{w_n} = \sum_{i=1}^n a_i\overline{b_i} = v^T\overline{w}$

Συνήθες εσωτερικό γινόμενο στον $V = \mathbb{C}^n$

Εσωτερικό γινόμενο: $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$
Έστω $v = (a_1, \dots, a_n), w = (b_1, \dots, b_n)$, τότε ορίζουμε
$\langle v, w \rangle = \langle (a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \rangle =$
$v_1\overline{w_1} + v_2\overline{w_2} + \dots v_n\overline{w_n} = \sum_{i=1}^{n} a_i\overline{b_i} = v^T\overline{w}$

Παράδειγμα, αν $V = \mathbb{C}^3, v = (1, 1+i, 2), w = (2, 3, i)$ τότε
$\langle v, w \rangle = 1 \cdot \overline{2} + (1+i) \cdot \overline{3} + 2 \cdot \overline{i} = 2 + 3 + 3i - 2i = 5 + i$
Όμοια, βρίσκουμε ότι $\langle v, w \rangle = 5 - i$
Ικασία: $\forall v, w \in \mathbb{C}^n, \langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$

Απόδειξη

Αν $v = (a_1, \dots, a_n), w = (b_1, \dots, b_n)$ τότε $\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^n a_i \overline{b_i}$ και $\langle w, v \rangle = \sum_{i=1}^n \overline{a_i} b_i$.

Απόδειξη

Αν $v = (a_1, \dots, a_n), w = (b_1, \dots, b_n)$ τότε $\langle v, w\rangle = \sum_{i=1}^n a_i \overline{b_i}$
και $\langle w, v\rangle = \sum_{i=1}^n \overline{a_i} b_i$.
Άρα $\overline{\langle w, v\rangle} = \overline{\sum_{i=1}^n \overline{a_i} b_i} = \sum_{i=1}^n \overline{\overline{a_i} b_i} = \sum_{i=1}^n a_i \overline{b_i} = \langle v, w\rangle$

Απόδειξη

Αν $v = (a_1, \ldots, a_n), w = (b_1, \ldots, b_n)$ τότε $\langle v, w\rangle = \sum_{i=1}^n a_i \overline{b_i}$
και $\langle w, v\rangle = \sum_{i=1}^n \overline{a_i} b_i$.
Άρα $\overline{\langle w, v\rangle} = \overline{\sum_{i=1}^n \overline{a_i} b_i} = \sum_{i=1}^n \overline{\overline{a_i} b_i} = \sum_{i=1}^n a_i \overline{b_i} = \langle v, w\rangle$

Πχ αν $v = (1, 1+i, 2) \in \mathbb{C}^3$ τότε
$\langle v, v\rangle = 1 \cdot \overline{1} + (1+i) \cdot \overline{(1+i)} + 2 \cdot \overline{2} = 1 + (1+i)(1-i) + 4 = 7$

Απόδειξη

Αν $v = (a_1, \ldots, a_n)$, $w = (b_1, \ldots, b_n)$ τότε $\langle v, w\rangle = \sum_{i=1}^n a_i \overline{b_i}$ και $\langle w, v\rangle = \sum_{i=1}^n \overline{a_i} b_i$.
Άρα $\overline{\langle w, v\rangle} = \overline{\sum_{i=1}^n \overline{a_i} b_i} = \sum_{i=1}^n \overline{\overline{a_i} b_i} = \sum_{i=1}^n a_i \overline{b_i} = \langle v, w\rangle$

Πχ αν $v = (1, 1+i, 2) \in \mathbb{C}^3$ τότε
$\langle v, v\rangle = 1 \cdot \overline{1} + (1+i) \cdot \overline{(1+i)} + 2 \cdot \overline{2} = 1 + (1+i)(1-i) + 4 = 7$
αν $w = (2, 3, i) \in \mathbb{C}^3$ τότε
$\langle w, w\rangle = 2 \cdot \overline{2} + 3 \cdot \overline{3} + i \cdot \overline{i} = 4 + 9 + i\overline{i} = 14$

Απόδειξη

Αν $v = (a_1, \ldots, a_n)$, $w = (b_1, \ldots, b_n)$ τότε $\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i \overline{b_i}$ και $\langle w, v \rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{a_i} b_i$.
Άρα $\overline{\langle w, v \rangle} = \overline{\sum_{i=1}^{n} \overline{a_i} b_i} = \sum_{i=1}^{n} \overline{\overline{a_i} b_i} = \sum_{i=1}^{n} a_i \overline{b_i} = \langle v, w \rangle$

Πχ αν $v = (1, 1+i, 2) \in \mathbb{C}^3$ τότε
$\langle v, v \rangle = 1 \cdot \overline{1} + (1+i) \cdot \overline{(1+i)} + 2 \cdot \overline{2} = 1 + (1+i)(1-i) + 4 = 7$
αν $w = (2, 3, i) \in \mathbb{C}^3$ τότε
$\langle w, w \rangle = 2 \cdot \overline{2} + 3 \cdot \overline{3} + i \cdot \overline{i} = 4 + 9 + i\overline{i} = 14$

Γενικότερα ισχύει $\langle v, v \rangle \geq 0$ και $\langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Dr. Φωτιάδης Ανέστης
Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2013-14

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης