ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

Χαραλάμπους Χαρά

Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2013

Αριστοτέλειο
Πανεπιστήμιο
Θεσσαλονίκης

Χρηματοδότηση

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα. Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Σύνοψη

Στην ενότητα αυτή θα μελετηθούν Εσωτερικά γινόμενα σε Ερμητιανούς και Ευκλείδιους χώρους, ορισμοί και ιδιότητες, μήκος διανυσμάτων.

Θεώρημα *Cayley* − *Hamilton*

Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας με χαρακτηριστικό πολυώνυμο το $P_A(x) = (-1)^n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$

Θεώρημα $Cayley - Hamilton$

Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας με χαρακτηριστικό πολυώνυμο το $P_A(x) = (-1)^n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$

Τότε, $(-1)^n A^n + \ldots + a_1 A + a_0 I = O$, δηλαδή $P_A(A) = O$

Ερμητιανοί διανυσματικοί χώροι

Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο $\mathbb{C}^n$ εφοδιασμένο με ένα εσωτερικό γινόμενο.
Για το συνήθες εσωτερικό γινόμενο έχουμε ότι αν
$v = (a_1, \ldots, a_n), w = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{C}^n$

Ερμητιανοί διανυσματικοί χώροι

Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο $\mathbb{C}^n$ εφοδιασμένο με ένα εσωτερικό γινόμενο.
Για το συνήθες εσωτερικό γινόμενο έχουμε ότι αν
$v = (a_1, \ldots, a_n), w = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{C}^n$
τότε $\langle v, w \rangle = a_1 \overline{b_1} + \cdots + a_n \overline{b_n} = v^T \overline{w}$,

Ερμητιανοί διανυσματικοί χώροι

Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο $\mathbb{C}^n$ εφοδιασμένο με ένα εσωτερικό γινόμενο.
Για το συνήθες εσωτερικό γινόμενο έχουμε ότι αν
$v = (a_1, \ldots, a_n), w = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{C}^n$
τότε $\langle v, w \rangle = a_1 \overline{b}_1 + \cdots + a_n \overline{b}_n = v^T \overline{w}$,

όπου τώρα θεωρούμε $v = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

Ιδιότητες

1. $\langle v, w\rangle = \overline{\langle w, v\rangle}$

Ιδιότητες

1. $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$
2. $\langle v, v \rangle \in \mathbb{R}_+$ και $\langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$

Ιδιότητες

1. $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$
2. $\langle v, v \rangle \in \mathbb{R}_+$ και $\langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$

Ορισμός: $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ μήκος του διανύσματος v

Ιδιότητες

1. $\langle v, w\rangle = \overline{\langle w, v\rangle}$
2. $\langle v, v\rangle \in \mathbb{R}_+$ και $\langle v, v\rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$

Ορισμός: $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$ μήκος του διανύσματος v
Ορισμός: v, w ορθογώνια $v \perp w$ αν $\langle v, w\rangle = 0$

Ιδιότητες

1. $\langle v, w\rangle = \overline{\langle w, v\rangle}$
2. $\langle v, v\rangle \in \mathbb{R}_+$ και $\langle v, v\rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$

Ορισμός: $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$ μήκος του διανύσματος v

Ορισμός: v, w ορθογώνια $v \perp w$ αν $\langle v, w\rangle = 0$

3 a_1. $\langle kv, w\rangle = k\langle v, w\rangle$

Ιδιότητες

1. $\langle v, w\rangle = \overline{\langle w, v\rangle}$
2. $\langle v, v\rangle \in \mathbb{R}_+$ και $\langle v, v\rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$

Ορισμός: $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$ μήκος του διανύσματος v

Ορισμός: v, w ορθογώνια $v \perp w$ αν $\langle v, w\rangle = 0$

3 a_1. $\langle kv, w\rangle = k\langle v, w\rangle$

3 a_2. $\langle v, kw\rangle = \overline{k}\langle v, w\rangle$

Ιδιότητες

1. $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$
2. $\langle v, v \rangle \in \mathbb{R}_+$ και $\langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$

Ορισμός: $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ μήκος του διανύσματος v
Ορισμός: v, w ορθογώνια $v \perp w$ αν $\langle v, w \rangle = 0$
3 a_1. $\langle kv, w \rangle = k\langle v, w \rangle$
3 a_2. $\langle v, kw \rangle = \overline{k}\langle v, w \rangle$
3 b_1. $\langle v_1 + v_2, w \rangle = \langle v_1, w \rangle + \langle v_2, w \rangle$

Ιδιότητες

1. $\langle v, w\rangle = \overline{\langle w, v\rangle}$
2. $\langle v, v\rangle \in \mathbb{R}_+$ και $\langle v, v\rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$

Ορισμός: $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$ μήκος του διανύσματος v
Ορισμός: v, w ορθογώνια $v \perp w$ αν $\langle v, w\rangle = 0$
3 a_1. $\langle kv, w\rangle = k\langle v, w\rangle$
3 a_2. $\langle v, kw\rangle = \overline{k}\langle v, w\rangle$
3 b_1. $\langle v_1 + v_2, w\rangle = \langle v_1, w\rangle + \langle v_2, w\rangle$
3 b_2. $\langle v, w_1 + w_2\rangle = \langle v, w_1\rangle + \langle v, w_2\rangle$

Παράδειγμα

Αν $x = (3 + i, 1, 1 - i), y = (2, i, 1 + 2i)$ τότε

Παράδειγμα

Αν $x = (3+i, 1, 1-i), y = (2, i, 1+2i)$ τότε

$\langle x, y \rangle = 5 - 2i$ άρα τα διανύσματα x, y δεν είναι ορθογώνια

Παράδειγμα

Αν $x = (3+i, 1, 1-i), y = (2, i, 1+2i)$ τότε

$\langle x, y \rangle = 5 - 2i$ άρα τα διανύσματα x, y δεν είναι ορθογώνια

$\langle x, x \rangle = 13$ άρα $\|x\| = \sqrt{13}$

Παράδειγμα

Αν $x = (3 + i, 1, 1 - i), y = (2, i, 1 + 2i)$ τότε

$\langle x, y \rangle = 5 - 2i$ άρα τα διανύσματα x, y δεν είναι ορθογώνια

$\langle x, x \rangle = 13$ άρα $\|x\| = \sqrt{13}$

Από τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου εύκολα συνάγουμε ότι $\langle y, x \rangle = 5 + 2i$

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Dr. Φωτιάδης Ανέστης

Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2013-14

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης