ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

Χαραλάμπους Χαρά

Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2013

Αριστοτέλειο
Πανεπιστήμιο
Θεσσαλονίκης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα. Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Σύνοψη

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε Ορθογώνια διανύσματα, προβολές, ιδιότητες ορθογώνιας βάσης, ορθογώνιο συμπλήρωμα, Προβολές, ανισότητα $Cauchy - Scwarz$(απόδειξη με προβολή), μέθοδος των $Gram - Schmidt$

Άσκηση 1

Δίνονται τα διανύσματα $w = (0, 2+i), v = (1, i)$. Θα βρούμε το διάνυσμα $proj_v w = \frac{\langle w, v\rangle}{\langle v, v\rangle} v$

Άσκηση 1

Δίνονται τα διανύσματα $w = (0, 2+i), v = (1, i)$. Θα βρούμε το διάνυσμα $proj_v w = \frac{\langle w,v \rangle}{\langle v,v \rangle} v$

Υπολογίζουμε πρώτα:

$\langle w, v \rangle = 1 - 2i$

Άσκηση 1

Δίνονται τα διανύσματα $w = (0, 2+i), v = (1, i)$. Θα βρούμε το διάνυσμα $proj_v w = \frac{\langle w,v \rangle}{\langle v,v \rangle} v$

Υπολογίζουμε πρώτα:

$\langle w, v \rangle = 1 - 2i$

$\langle v, v \rangle v = 2$

Άσκηση 1

Δίνονται τα διανύσματα $w = (0, 2 + i), v = (1, i)$. Θα βρούμε το διάνυσμα $proj_v w = \frac{\langle w,v \rangle}{\langle v,v \rangle} v$
Υπολογίζουμε πρώτα:
$\langle w, v \rangle = 1 - 2i$
$\langle v, v \rangle v = 2$

Άρα $proj_v w = \frac{1-2i}{2}(1, i)$

Άσκηση 2

Δίνεται η ορθογώνια βάση

$$\{\ v_1 = (3, 1, -1),\ v_2 = (1, -2, 1),\ v_3 = (1, 4, 7)\ \}$$

του Ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}^3$

Άσκηση 2

Δίνεται η ορθογώνια βάση

$$\{ v_1 = (3, 1, -1),\ v_2 = (1, -2, 1),\ v_3 = (1, 4, 7) \}$$

του Ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}^3$
Θα γράψουμε το τυχαίο διάνυσμα $v = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ ως γραμμικό συνδιασμό των v_1, v_2, v_3

Άσκηση 2

Δίνεται η ορθογώνια βάση

$$\{\, v_1 = (3,1,-1),\ v_2 = (1,-2,1),\ v_3 = (1,4,7) \,\}$$

του Ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}^3$
Θα γράψουμε το τυχαίο διάνυσμα $v = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ ως γραμμικό συνδιασμό των v_1, v_2, v_3

Αν $v = k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_3 v_3$ τότε $k_1 = \frac{\langle v, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} = \frac{3a+b-c}{11}$

Άσκηση 2

Δίνεται η ορθογώνια βάση

$$\{\ v_1 = (3, 1, -1),\ v_2 = (1, -2, 1),\ v_3 = (1, 4, 7)\ \}$$

του Ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}^3$
Θα γράψουμε το τυχαίο διάνυσμα $v = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ ως γραμμικό συνδιασμό των v_1, v_2, v_3

Αν $v = k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_3 v_3$ τότε $k_1 = \frac{\langle v, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} = \frac{3a+b-c}{11}$

Όμοια βρίσκουμε $k_2 = \frac{a-2b+c}{6}$, $k_3 = \frac{a+4b+7c}{66}$

Πρόταση

Άν $v_1, \ldots, v_n$ είναι μη μηδενικά και ανά δύο ορθογώνια τότε είναι γραμμικά ανεξάρτητα

Πρόταση

Άν $v_1, \ldots, v_n$ είναι μη μηδενικά και ανά δύο ορθογώνια τότε είναι γραμμικά ανεξάρτητα
Απόδειξη: Έστω ότι $k_1 v_1 + \cdots + k_l v_l = 0$ τότε $k_i = 0$.

Πρόταση

Άν $v_1, \ldots, v_n$ είναι μη μηδενικά και ανά δύο ορθογώνια τότε είναι γραμμικά ανεξάρτητα
Απόδειξη: Έστω ότι $k_1 v_1 + \cdots + k_l v_l = 0$ τότε $k_i = 0$.
Πράγματι, πχ για $i = 1$ έχουμε:
$\langle k_1 v_1 + \cdots + k_l v_l, v_1 \rangle = 0 \Rightarrow k_1 \|v_1\|^2 = 0 \Rightarrow k_1 = 0$

Πρόταση

Άν $v_1, \ldots, v_n$ είναι μη μηδενικά και ανά δύο ορθογώνια τότε είναι γραμμικά ανεξάρτητα
Απόδειξη: Έστω ότι $k_1 v_1 + \cdots + k_l v_l = 0$ τότε $k_i = 0$.
Πράγματι, πχ για $i = 1$ έχουμε:
$\langle k_1 v_1 + \cdots + k_l v_l, v_1 \rangle = 0 \Rightarrow k_1 \|v_1\|^2 = 0 \Rightarrow k_1 = 0$
Όμοια δείχνει κανείς ότι $k_2 = \cdots = k_l = 0$

Άσκηση 2-Σχόλια

Αφού τα διανύσματα

$$\{\ v_1 = (3, 1, -1),\ v_2 = (1, -2, 1),\ v_3 = (1, 4, 7)\ \}$$

είναι ανά δύο ορθογώνια τότε είναι και γραμμικά ανεξάρτητα. Αφού η διάσταση του χώρου ειναι 3 τότε αναγκαστικά τα παραπάνω διανύσματα αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^3$.

Άσκηση 3

Δίνονται τα διανύσματα $v_1 = (-3, 0, 4)$, $v_2 = (4, 0, -3)$, $v_3 = (0, 5, 0)$ τα οποία αποτελούν ένα ορθογώνιο σύστημα, να βρεθούν οι προβολές του διανύσματος $u = (1, 2, 3)$

Άσκηση 3

Δίνονται τα διανύσματα $v_1 = (-3, 0, 4)$, $v_2 = (4, 0, -3)$, $v_3 = (0, 5, 0)$ τα οποία αποτελούν ένα ορθογώνιο σύστημα, να βρεθούν οι προβολές του διανύσματος $u = (1, 2, 3)$

Αν $v = k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_3 v_3$ τότε $k_1 = \frac{\langle v, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} = \frac{9}{25}$

Άσκηση 3

Δίνονται τα διανύσματα $v_1 = (-3, 0, 4)$, $v_2 = (4, 0, -3)$, $v_3 = (0, 5, 0)$ τα οποία αποτελούν ένα ορθογώνιο σύστημα, να βρεθούν οι προβολές του διανύσματος $u = (1, 2, 3)$

Αν $v = k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_3 v_3$ τότε $k_1 = \frac{\langle v, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} = \frac{9}{25}$Όμοια βρίσκουμε $k_2 = -\frac{1}{5}, k_3 = \frac{2}{5}$

Άσκηση 3

Δίνονται τα διανύσματα $v_1 = (-3, 0, 4)$, $v_2 = (4, 0, -3)$, $v_3 = (0, 5, 0)$ τα οποία αποτελούν ένα ορθογώνιο σύστημα, να βρεθούν οι προβολές του διανύσματος $u = (1, 2, 3)$

Αν $v = k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_3 v_3$ τότε $k_1 = \frac{\langle v, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} = \frac{9}{25}$Όμοια βρίσκουμε $k_2 = -\frac{1}{5}, k_3 = \frac{2}{5}$

Έχουμε $proj_{v_1} v = k_1 v_1 = \frac{9}{25} v_1$, $proj_{S(\{v_2, v_3\})} v = k_2 v_2 + k_3 v_3$ και $proj_{S(\{v_1, v_3\})} v = k_1 v_1 + k_3 v_3$

Παρατήρηση

Αν $u_1 = ku_2$ τότε $proj_{u_2} u_1 = u_1$. Όμοια για το $proj_{u_1} u_2$.

Παρατήρηση

Αν $u_1 = ku_2$ τότε $proj_{u_2} u_1 = u_1$. Όμοια για το $proj_{u_1} u_2$.

Πράγματι, το ίδιο αποτέλεσμα παίρνουμε από τον τύπο $proj_{u_2} u_1 = \frac{\langle v_1, v_2 \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle} v_2$

Παρατήρηση

Αν $u_1 = ku_2$ τότε $proj_{u_2} u_1 = u_1$. Όμοια για το $proj_{u_1} u_2$.

Πράγματι, το ίδιο αποτέλεσμα παίρνουμε από τον τύπο $proj_{u_2} u_1 = \frac{\langle v_1, v_2 \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle} v_2$

Αν $proj_V u = 0$ τότε $u \perp V$

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Dr. Φωτιάδης Ανέστης

Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2013-14

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης