ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

Χαραλάμπους Χαρά

Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2013

Αριστοτέλειο
Πανεπιστήμιο
Θεσσαλονίκης

Χρηματοδότηση

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα. Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Σύνοψη

1. Ενότητα 6. Ορθοκανονικές βάσεις
   - Θεώρημα: Ανισότητα *Cauchy* − *Schwarz*

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε Ορθογώνια διανύσματα, προβολές, ιδιότητες ορθογώνιας βάσης, ορθογώνιο συμπλήρωμα, Προβολές, ανισότητα *Cauchy* − *Scwarz*(απόδειξη με προβολή), μέθοδος των *Gram* − *Schmidt*

Αν $u \in V$ τότε $proj_V u = u$ και άρα $u - proj_V u = O \perp V$

Αν $u \in V$ τότε $proj_V u = u$ και άρα $u - proj_V u = O \perp V$

Έστω V διανυσματικός υποχώρος του $\mathbb{C}^n$.

Αν $u \in V$ τότε $proj_V u = u$ και άρα $u - proj_V u = O \perp V$

Έστω V διανυσματικός υποχώρος του $\mathbb{C}^n$. Έστω $u \in V$ τότε $u = proj_V u + w$, όπου $proj_V u \in V$ και $w \in V^\perp$

Αν $u \in V$ τότε $proj_V u = u$ και άρα $u - proj_V u = O \perp V$

Έστω V διανυσματικός υποχώρος του $\mathbb{C}^n$. Έστω $u \in V$ τότε $u = proj_V u + w$, όπου $proj_V u \in V$ και $w \in V^\perp$

Αν $u_1 = ku_2$ τότε

$$proj_{u_2} u_1 = \frac{\langle u_1, u_2 \rangle}{\langle u_2, u_2 \rangle} u_2 = k \frac{\langle u_2, u_2 \rangle}{\langle u_2, u_2 \rangle} u_2 = ku_2 = u_1$$

Θεωρούμε τα γραμμικά ανεξέρτητα διανύσματα $u = (-1, i, 0, 1), w = (i, 0, 2, 0) \in \mathbb{C}^4$.

Θεωρούμε τα γραμμικά ανεξέρτητα διανύσματα $u = (-1, i, 0, 1), w = (i, 0, 2, 0) \in \mathbb{C}^4$.Θεωρούμε το χώρο $W = S\{(-1, i, 0, 1), (i, 0, 2, 0)\}$. Τότε $dim(W) = 2$.

Θεωρούμε τα γραμμικά ανεξέρτητα διανύσματα $u = (-1, i, 0, 1), w = (i, 0, 2, 0) \in \mathbb{C}^4$.Θεωρούμε το χώρο $W = S\{(-1, i, 0, 1), (i, 0, 2, 0)\}$. Τότε $dim(W) = 2$.

Παρατηρούμε ότι $\langle u, w \rangle = (-1) \cdot \bar{i} + i \cdot 0 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 0 = i$ και άρα u, w δεν είναι ορθογώνια.

Θεωρούμε τα γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα $u = (-1, i, 0, 1), w = (i, 0, 2, 0) \in \mathbb{C}^4$.Θεωρούμε το χώρο $W = S\{(-1, i, 0, 1), (i, 0, 2, 0)\}$. Τότε $dim(W) = 2$.

Παρατηρούμε ότι $\langle u, w\rangle = (-1) \cdot \bar{i} + i \cdot 0 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 0 = i$ και άρα u, w δεν είναι ορθογώνια.

Να βρεθεί ο χώρος $W^{\perp}$. Αναζητούμε όλα τα διανύσματα $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$ τέτοια ώστε $(a, b, c, d) \perp V$ και $(a, b, c, d) \perp W$.

Θεωρούμε τα γραμμικά ανεξέρτητα διανύσματα $u = (-1, i, 0, 1), w = (i, 0, 2, 0) \in \mathbb{C}^4$.Θεωρούμε το χώρο $W = S\{(-1, i, 0, 1), (i, 0, 2, 0)\}$. Τότε $dim(W) = 2$.

Παρατηρούμε ότι $\langle u, w \rangle = (-1) \cdot \bar{i} + i \cdot 0 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 0 = i$ και άρα u, w δεν είναι ορθογώνια.

Να βρεθεί ο χώρος $W^{\perp}$. Αναζητούμε όλα τα διανύσματα $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$ τέτοια ώστε $(a, b, c, d) \perp V$ και $(a, b, c, d) \perp W$. Αρκεί $(a, b, c, d) \perp u$ και $(a, b, c, d) \perp w$.

Θεωρούμε τα γραμμικά ανεξέρτητα διανύσματα $u = (-1, i, 0, 1), w = (i, 0, 2, 0) \in \mathbb{C}^4$.Θεωρούμε το χώρο $W = S\{(-1, i, 0, 1), (i, 0, 2, 0)\}$. Τότε $dim(W) = 2$.

Παρατηρούμε ότι $\langle u, w\rangle = (-1) \cdot \bar{i} + i \cdot 0 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 0 = i$ και άρα u, w δεν είναι ορθογώνια.

Να βρεθεί ο χώρος $W^{\perp}$. Αναζητούμε όλα τα διανύσματα $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$ τέτοια ώστε $(a, b, c, d) \perp V$ και $(a, b, c, d) \perp W$. Αρκεί $(a, b, c, d) \perp u$ και $(a, b, c, d) \perp w$.

Άρα έχουμε $\langle (a, b, c, d), u\rangle = \langle (a, b, c, d), w\rangle = 0$ και καταλήγουμε στο σύστημα

$$\begin{aligned} a - bi + 0c + d &= 0 \\ -ai + 0b + 2c + 0d &= 0 \end{aligned}$$

Θεωρούμε τον πίνακα που αντιστοιχεί στο σύστημα αυτό και κάνουμε γραμμοπράξεις

$$\begin{pmatrix} 1 & -i & 0 & 1 \\ -i & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Θεωρούμε τον πίνακα που αντιστοιχεί στο σύστημα αυτό και κάνουμε γραμμοπράξεις

$$\begin{pmatrix} 1 & -i & 0 & 1 \\ -i & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\Gamma_2''=-\Gamma_2]{\Gamma_2'=\Gamma_2+i\Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & i \end{pmatrix}$$

Θεωρούμε τον πίνακα που αντιστοιχεί στο σύστημα αυτό και κάνουμε γραμμοπράξεις

$$\begin{pmatrix} 1 & -i & 0 & 1 \\ -i & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\Gamma_2''=-\Gamma_2]{\Gamma_2'=\Gamma_2+i\Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & i \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\Gamma_1'=\Gamma_1-i\Gamma_2=-\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2i & 0 \\ 0 & 1 & -2 & i \end{pmatrix}$$

Θεωρούμε τον πίνακα που αντιστοιχεί στο σύστημα αυτό και κάνουμε γραμμοπράξεις

$$\begin{pmatrix} 1 & -i & 0 & 1 \\ -i & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\Gamma_2''=-\Gamma_2]{\Gamma_2'=\Gamma_2+i\Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & i \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\Gamma_1'=\Gamma_1-i\Gamma_2=-\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2i & 0 \\ 0 & 1 & -2 & i \end{pmatrix}$$

Καταλήγουμε στις εξισώσεις $a=-2ic, b=2c-id$ και συμπεραίνουμε ότι

$$W^{\perp}=\{(a,b,c,d)\in\mathbb{C}^4 : a=-2ic, b=2c-id\}$$

Παρατηρούμε ότι $dim(W^{\perp})=2$ και $W^{\perp}=null(A)$, όπου οι γραμμές του A είναι συζηγείς των διανυσμάτων βάσης του W

A, γραμμές τα συζηγή των διανυσμάτων βάσης του W.

A, γραμμές τα συζηγή των διανυσμάτων βάσης του W.

Τότε $W^{\perp} = null(A)$

A, γραμμές τα συζηγή των διανυσμάτων βάσης του W.

Τότε $W^{\perp} = null(A)$

$rank(A) = dim(W)$

A, γραμμές τα συζηγή των διανυσμάτων βάσης του W.

Τότε $W^{\perp} = null(A)$

$rank(A) = dim(W)$

$dim(null(A)) = \sharp$στηλων $- rank(A)$

A, γραμμές τα συζηγή των διανυσμάτων βάσης του W.

Τότε $W^{\perp} = null(A)$

$rank(A) = dim(W)$

$dim(null(A)) = \sharp\sigma\tau\eta\lambda\omega\nu - rank(A)$

Άρα

$$\begin{aligned} dim(null(A)) = dim(W^{\perp}) &= \sharp\sigma\tau\eta\lambda\omega\nu - rank(A) \\ &= \sharp\sigma\tau\eta\lambda\omega\nu - dim(W) \end{aligned}$$

A, γραμμές τα συζηγή των διανυσμάτων βάσης του W.

Τότε $W^{\perp} = null(A)$

$rank(A) = dim(W)$

$dim(null(A)) = \sharp στηλων - rank(A)$

Άρα

$$\begin{aligned} dim(null(A)) = dim(W^{\perp}) &= \sharp στηλων - rank(A) \\ &= \sharp στηλων - dim(W) \end{aligned}$$

Αν $W \subset \mathbb{C}^n$ τότε $n = dim(W) + dim(W^{\perp})$

Είναι $W \bigcap W^{\perp} = O$ αφού
$v \in W, v \in W^{\perp} \Rightarrow \langle v, v \rangle = 0 \Rightarrow v = O$

Είναι $W \bigcap W^{\perp} = O$ αφού
$v \in W, v \in W^{\perp} \Rightarrow \langle v, v \rangle = 0 \Rightarrow v = O$

Άρα $\mathbb{C}^n = W \oplus W^{\perp}$

Είναι $W \bigcap W^{\perp} = O$ αφού

$v \in W, v \in W^{\perp} \Rightarrow \langle v, v \rangle = 0 \Rightarrow v = O$

Άρα $\mathbb{C}^n = W \oplus W^{\perp}$

$u \in \mathbb{C}^n \Rightarrow u = w + w', w \in W, w' \in W^{\perp}$

Θεώρημα: Ανισότητα *Cauchy – Schwarz*

$u, w \in \mathbb{C}^n, |\langle u, w\rangle| \leq \|u\| \cdot \|w\|$

$u = O$ ή $w = O$ τότε η ανισότητα ισχύει. Θεωρούμε $u, w \neq O$.

Θεώρημα: Ανισότητα *Cauchy − Schwarz*

$u, w \in \mathbb{C}^n, |\langle u, w \rangle| \leq \|u\| \cdot \|w\|$
$u = O$ ή $w = O$ τότε η ανισότητα ισχύει. Θεωρούμε $u, w \neq O$.

Θεώρημα: Ανισότητα *Cauchy − Schwarz*

$u, w \in \mathbb{C}^n, |\langle u, w\rangle| \leq \|u\| \cdot \|w\|$
$u = O$ ή $w = O$ τότε η ανισότητα ισχύει. Θεωρούμε
$u, w \neq O$.Τότε $w = proj_u w + w'$, όπου $w' \in \perp u$

$$\Rightarrow \|w\|^2 = \|proj_u w\|^2 + \|w'\|^2$$
$$\Rightarrow \|w\|^2 \geq \|proj_u w\|^2$$

Θεώρημα: Ανισότητα *Cauchy* – *Schwarz*

$u, w \in \mathbb{C}^n, |\langle u, w\rangle| \leq \|u\| \cdot \|w\|$
$u = O$ ή $w = O$ τότε η ανισότητα ισχύει. Θεωρούμε
$u, w \neq O$.Τότε $w = proj_u w + w'$, όπου $w' \in \perp u$

$$\Rightarrow \|w\|^2 = \|proj_u w\|^2 + \|w'\|^2$$
$$\Rightarrow \|w\|^2 \geq \|proj_u w\|^2$$

$proj_u w = \frac{\langle w,u\rangle}{\langle u,u\rangle} u \Rightarrow \|proj_u w\| = \frac{\|\langle w,u\rangle\|}{\|u\|^2}\|u\| \Rightarrow \|proj_u w\|^2 =$
$\frac{|\langle w,u\rangle|^2}{\|u\|^2} \Rightarrow \|w\|^2 \geq \frac{|\langle w,u\rangle|^2}{\|u\|^2} \Rightarrow |\langle u, w\rangle| \leq \|u\| \cdot \|w\|$

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Dr. Φωτιάδης Ανέστης

Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2013-14

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης