ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

Χαραλάμπους Χαρά

Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2013

Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα. Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Σύνοψη

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε Ορθογώνια διανύσματα, προβολές, ιδιότητες ορθογώνιας βάσης, ορθογώνιο συμπλήρωμα, Προβολές, ανισότητα $Cauchy - Scwarz$(απόδειξη με προβολή), μέθοδος των $Gram - Schmidt$

Άσκηση

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Άσκηση

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\Gamma(A) = S(\{(1,3,1,3,0),(2,5,1,2,1),(-1,-1,2,0,-3)\}) \subset \mathbb{R}^5$$

Άσκηση

Χαραλάμπους Χαρά

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$\Gamma(A) = S(\{(1,3,1,3,0),(2,5,1,2,1),(-1,-1,2,0,-3)\}) \subset \mathbb{R}^5$

Να βρεθεί ο $\Gamma(A)^{\perp}$

Λύση

Γνωρίζουμε ότι $(a, b, c, d, e) \in \Gamma(A)^{\perp} \Leftrightarrow (a, b, c, d, e) \perp v, \forall v \in \Gamma(A) \Leftrightarrow (a, b, c, d, e) \perp$ στα τρία διανύσματα που παράγουν τον A.

Λύση

Γνωρίζουμε ότι $(a, b, c, d, e) \in \Gamma(A)^{\perp} \Leftrightarrow (a, b, c, d, e) \perp v, \forall v \in \Gamma(A) \Leftrightarrow (a, b, c, d, e) \perp$ στα τρία διανύσματα που παράγουν τον A.Άρα,

$$\begin{aligned} a + 3b + c + 3d &= 0 \\ 2a + 5b + c + 2d + e &= 0 \\ -a - b + 2c - 3e &= 0 \end{aligned}$$

Λύση

Γνωρίζουμε ότι $(a, b, c, d, e) \in \Gamma(A)^{\perp} \Leftrightarrow (a, b, c, d, e) \perp v, \forall v \in \Gamma(A) \Leftrightarrow (a, b, c, d, e) \perp$ στα τρία διανύσματα που παράγουν τον A.Άρα,

$$\begin{aligned} a + 3b + c + 3d &= 0 \\ 2a + 5b + c + 2d + e &= 0 \\ -a - b + 2c - 3e &= 0 \end{aligned}$$

και συνεπώς

$$\Gamma(A)^{\perp} = null(\overline{A}), A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\Gamma_3'=\Gamma_3+\Gamma_1]{\Gamma_2'=\Gamma_2-2\Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\Gamma_3'=\Gamma_3+\Gamma_1]{\Gamma_2'=\Gamma_2-2\Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι

$$rank(A) = 3 \Rightarrow dim(\Gamma(A)) = 3 \Rightarrow$$
$$dim(null(A)) = 5 - 3 = 2 \Rightarrow dim(\Gamma(A)^{\perp}) = 2$$

$$\xrightarrow[\Gamma_3'=\Gamma_3-2\Gamma_2']{\Gamma_2'=-\Gamma_2}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\Gamma_3'=\Gamma_3-2\Gamma_2']{\Gamma_2'=-\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -19 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\Gamma_3'=\Gamma_3-2\Gamma_2']{\Gamma_2'=-\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -19 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

Άρα έχουμε

$$a = 19d - e$$

$$b = -9d$$

$$c = 5d + e$$

$$\xrightarrow[\Gamma_3'=\Gamma_3-2\Gamma_2']{\Gamma_2'=-\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -19 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

Άρα έχουμε

$$a = 19d - e$$

$$b = -9d$$

$$c = 5d + e$$

Άρα βρίσκουμε τον μηδενοχώρο

$$null(A) = \{(d(19, -9, 5, 1, 0) + e(-1, 0, 1, 0, 1)) : d, e \in \mathbb{R}\}$$

Έστω $C(A)$ ο χώρος στηλών του πίνακα A. Τότε έχουμε

$$C(A^{\perp}) = \Gamma(A^{T})^{\perp} = null(A^{T})$$

Άσκηση

$$U = S(\{(2,1,0),(1,3,2)\}) \subset \mathbb{R}^3.$$

Άσκηση

$U = S(\{(2,1,0),(1,3,2)\}) \subset \mathbb{R}^3$.
Βρείτε ορθογώνια βάση του U.

Άσκηση

$U = S(\{(2,1,0),(1,3,2)\}) \subset \mathbb{R}^3$.
Βρείτε ορθογώνια βάση του U.
Επεκτείνετέ την σε βάση του $\mathbb{R}^3$.

Άσκηση

$U = S(\{(2,1,0),(1,3,2)\}) \subset \mathbb{R}^3$.
Βρείτε ορθογώνια βάση του U.
Επεκτείνετέ την σε βάση του $\mathbb{R}^3$.
Μετατρέψτε τη βάση αυτή του $\mathbb{R}^3$ σε ορθοκανονική.

Θέτουμε $u_1 = (2,1,0), u_2 = (1,3,2)$ και παρατηρούμε ότι u_1, u_2 δεν είναι ορθογώνια αφού $\langle u_1, u_2 \rangle = 5 \neq 0$

Θεωρούμε την προβολή $u_2' = u_2 - \frac{\langle u_2, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 = (-1, 2, 2)$

Θεωρούμε την προβολή $u_2' = u_2 - \frac{\langle u_2, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 = (-1, 2, 2)$ και παρατήρούμε ότι $\langle u_1, u_2' \rangle = 0$, άρα $\{(2,1,0), (-1,2,2)\}$ αποτελούν μια ορθογώνια βάση του U

Θεωρούμε την προβολή $u_2' = u_2 - \frac{\langle u_2, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 = (-1, 2, 2)$ και παρατήρούμε ότι $\langle u_1, u_2' \rangle = 0$, άρα $\{(2,1,0), (-1,2,2)\}$ αποτελούν μια ορθογώνια βάση του U

Έστω $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$. Παρατηρούμε ότι

$$
\begin{aligned}
proj_U(e_1) &= \frac{\langle e_1, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 + \frac{\langle e_1, u_2 \rangle}{\langle u_2, u_2 \rangle} u_2 \\
&= \frac{2}{5}(2,1,0) + \frac{-1}{9}(-1,2,2)
\end{aligned}
$$

Άρα

$$
proj_U(e_1) \neq e_1 \Leftrightarrow e_1 \notin U0 \notin\Leftrightarrow e_1 - proj_U(e_1) \in U^{\perp} \Leftrightarrow
$$

$$
\{(2,1,0), (-1,2,2), e_1 - proj_U(e_1)\} \text{ ορθογώνια βάση του } \mathbb{R}^3
$$

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Dr. Φωτιάδης Ανέστης

Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2013-14

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης