ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

Χαραλάμπους Χαρά

Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2013

Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα. Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Σύνοψη

1 Ενότητα 7. Εφαρμογές προβολών

Σε αυτή την ενότητα θα μελετηθούν ορθογώνιο συμπλήρωμα χώρου γραμμών= μηδενοχώρος του συζυγή αναστρόφου, μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων, Ευθεία ελαχίστων τετραγώνων, γενικευμένο εσωτερικό γινόμενο.

Συμπέρασμα

$AX = B$ συμβατό $\Leftrightarrow B \in C(A)$ =χώρος στηλών του A

Συμπέρασμα

$AX = B$ συμβατό $\Leftrightarrow B \in C(A) =$χώρος στηλών του A
Βέλτιστη προσεγγιστική λύση Z που δίνει το $proj_U(w) = AZ$

Συμπέρασμα

$AX = B$ συμβατό $\Leftrightarrow B \in C(A) =$χώρος στηλών του A
Βέλτιστη προσεγγιστική λύση Z που δίνει το $proj_U(w) = AZ$
Αρκεί να λύσουμε το σύστημα $A^T AX = A^T B$

Συμπέρασμα

$AX = B$ συμβατό $\Leftrightarrow B \in C(A) =$χώρος στηλών του A

Βέλτιστη προσεγγιστική λύση Z που δίνει το $proj_U(w) = AZ$

Αρκεί να λύσουμε το σύστημα $A^T AX = A^T B$

Στο παράδειγμα έχουμε

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Συμπέρασμα

$AX = B$ συμβατό $\Leftrightarrow B \in C(A) =$χώρος στηλών του A
Βέλτιστη προσεγγιστική λύση Z που δίνει το $proj_U(w) = AZ$
Αρκεί να λύσουμε το σύστημα $A^TAX = A^TB$
Στο παράδειγμα έχουμε

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

και άρα $A^TA = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 10 & 35 \end{pmatrix}, A^TB = \begin{pmatrix} 8 \\ 20 \end{pmatrix}$

Λύνουμε το σύστημα $A^T AX = A^T B$ το οποίο έχει μοναδική λύση, τη βέλτιστη προσεγγιστική λύση

Λύνουμε το σύστημα $A^T AX = A^T B$ το οποίο έχει μοναδική λύση, τη βέλτιστη προσεγγιστική λύση
Έχει μια και μοναδική λύση Z αν $det(A^T A) \neq 0$

Λύνουμε το σύστημα $A^T AX = A^T B$ το οποίο έχει μοναδική λύση, τη βέλτιστη προσεγγιστική λύση
Έχει μια και μοναδική λύση Z αν $det(A^T A) \neq 0$
Υπάρχουν άπειρες βέλτιστες προσεγγιστικές λύσεις αν $det(A^T A) = 0$

Παρατήρηση

Έστω το σύστημα $AX = B$ να μην είναι συμβατό.
Παρατηρούμε ότι το $A^T AX = A^T B$ είναι πάντα συμβατό

Παρατήρηση

Έστω το σύστημα $AX = B$ να μην είναι συμβατό.
Παρατηρούμε ότι το $A^T AX = A^T B$ είναι πάντα συμβατό
Λύση Z η βέλτιστη προσεγγιστική λύση του αρχικού συστήματος και $AZ = B'$, όπου $\|B' - B\|$ ελάχιστα δυνατό μήκος

Παρατήρηση

Έστω το σύστημα $AX = B$ να μην είναι συμβατό.
Παρατηρούμε ότι το $A^T AX = A^T B$ είναι πάντα συμβατό
Λύση Z η βέλτιστη προσεγγιστική λύση του αρχικού συστήματος και $AZ = B'$, όπου $\|B' - B\|$ ελάχιστα δυνατό μήκος
Έστω το σύστημα $AX = B$ να είναι συμβατό, άρα υπάρχει λύση X_1 και $AX_1 = B \Rightarrow A^T AX_1 = A^T B \Rightarrow X_1$ βέλτιστη προσεγγιστική λύση.

Παρατήρηση

Έστω το σύστημα $AX = B$ να μην είναι συμβατό.
Παρατηρούμε ότι το $A^T AX = A^T B$ είναι πάντα συμβατό
Λύση Z η βέλτιστη προσεγγιστική λύση του αρχικού συστήματος και $AZ = B'$, όπου $\|B' - B\|$ ελάχιστα δυνατό μήκος
Έστω το σύστημα $AX = B$ να είναι συμβατό, άρα υπάρχει λύση X_1 και $AX_1 = B \Rightarrow A^T AX_1 = A^T B \Rightarrow X_1$ βέλτιστη προσεγγιστική λύση.
Ερώτημα: Έστω $AX = B$ είναι συμβατό. Αν X_1 λύση του $A^T AX = A^T B$ ισχύει ότι X_1 λύση του $AX = B$;

Παράδειγμα

Δίνονται τα σημεία $(-1, 1), (0, 0), (2, 3), (3, 4)$.

Παράδειγμα

Δίνονται τα σημεία $(-1,1),(0,0),(2,3),(3,4)$. Αναζητούμε την ευθεία των ελαχίστων τετραγώνων

Παράδειγμα

Δίνονται τα σημεία $(-1, 1), (0, 0), (2, 3), (3, 4)$. Αναζητούμε την ευθεία των ελαχίστων τετραγώνων
Δηλαδή αναζητούμε ευθεία $y = a_1 x + a_0$. Αν τα σημεία ανήκαν στην ευθεία τότε θα είχαμε τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} a_1(-1) + a_0 &= 1 \\ a_1 0 + a_0 &= 0 \\ a_1 2 + a_0 &= 3 \\ a_1 3 + a_0 &= 4 \end{aligned}$$

Αυτό είναι ένα μη συμβατό σύστημα. Αναζητούμε βέλτιστη προσεγγιστική λύση.

Θεωρούμε τον πίνακα του συστήματος $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Λύνουμε το σύστημα $A^TAX = A^TB$ στο οποίο αντιστοιχεί ο πίνακας $\left(\begin{array}{cc|c} 14 & 4 & 17 \\ 4 & 4 & 8 \end{array}\right)$ και έχει μοναδική λύση και βρίσκουμε για λύση του προβλήματός μας μια μοναδική ευθεία.

Εσωτερικό γινόμενο σε έναν $\mathbb{R}-$ διανυσματικό χώρο V

Παράδειγματα: $V = \mathbb{R}^n, V = m \times n$ πίνακες με στοιχεία από το $\mathbb{R}$, $V =$ συνεχείς συναρτήσεις $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Εσωτερικό γινόμενο σε έναν $\mathbb{R}-$ διανυσματικό χώρο V

Παράδειγματα: $V = \mathbb{R}^n, V =$ $m \times n$ πίνακες με στοιχεία από το $\mathbb{R}$, $V =$ συνεχείς συναρτήσεις $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Ορισμός: $V \times V \to \mathbb{R}, (v_1, v2) \to \langle v_1, v_2 \rangle \in \mathbb{R}$ που ικανοποιεί

Εσωτερικό γινόμενο σε έναν $\mathbb{R}-$ διανυσματικό χώρο V

Παράδειγματα: $V = \mathbb{R}^n, V = m \times n$ πίνακες με στοιχεία από το $\mathbb{R}$, $V =$ συνεχείς συναρτήσεις $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Ορισμός: $V \times V \to \mathbb{R}, (v_1, v2) \to \langle v_1, v_2 \rangle \in \mathbb{R}$ που ικανοποιεί
1. $\langle v, v \rangle \geq 0, \langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$

Εσωτερικό γινόμενο σε έναν $\mathbb{R}-$ διανυσματικό χώρο V

Παράδειγματα: $V = \mathbb{R}^n, V = m \times n$ πίνακες με στοιχεία από το $\mathbb{R}$, $V =$ συνεχείς συναρτήσεις $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Ορισμός: $V \times V \longrightarrow \mathbb{R}, (v_1, v2) \longrightarrow \langle v_1, v_2 \rangle \in \mathbb{R}$ που ικανοποιεί

1. $\langle v, v \rangle \geq 0, \langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$
2. $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$

Εσωτερικό γινόμενο σε έναν $\mathbb{R}-$ διανυσματικό χώρο V

Παράδειγματα: $V = \mathbb{R}^n, V = m \times n$ πίνακες με στοιχεία από το $\mathbb{R}$, $V =$ συνεχείς συναρτήσεις $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Ορισμός: $V \times V \to \mathbb{R}, (v_1, v2) \to \langle v_1, v_2 \rangle \in \mathbb{R}$ που ικανοποιεί

1. $\langle v, v \rangle \geq 0, \langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$
2. $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$

3.α) $\langle kv, w \rangle = k\langle v, w \rangle$

3.β) $\langle v_1 + v_2, w \rangle = \langle v_1, w \rangle + \langle v_2, w \rangle$

Εσωτερικό γινόμενο σε έναν $\mathbb{R}-$ διανυσματικό χώρο V

Παράδειγματα: $V = \mathbb{R}^n, V = m \times n$ πίνακες με στοιχεία από το $\mathbb{R}$, $V =$ συνεχείς συναρτήσεις $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Ορισμός: $V \times V \to \mathbb{R}, (v_1, v2) \to \langle v_1, v_2 \rangle \in \mathbb{R}$ που ικανοποιεί

1. $\langle v, v \rangle \geq 0, \langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$

2. $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$

3.α) $\langle kv, w \rangle = k\langle v, w \rangle$

3.β) $\langle v_1 + v_2, w \rangle = \langle v_1, w \rangle + \langle v_2, w \rangle$

Παράδειγμα: $V = \mathbb{R}^n$ με το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο,
$v_1 = (a_1, a_2, \ldots, a_n), v_2 = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$,
$\langle v_1, v_2 \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots a_n b_n$

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Dr. Φωτιάδης Ανέστης

Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2013-14

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης