ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

Χαραλάμπους Χαρά

Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2013

Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Χαραλάμπους Χαρά

Ενότητα 8. Ισομετρίες

Ασκήσεις

Χρηματοδότηση

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα. Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Σύνοψη

1 Ενότητα 8. Ισομετρίες
- Ασκήσεις

Σε αυτή την ενότητα θα μελετηθούν ισομετρίες, διατήρηση του εσωτερικού γινομένου και απεικόνιση ορθοκανονικής βάσης σε ορθοκανονική βάση, ισομετρίες στο επίπεδο: αντικατοπτρισμοί, περιστροφές, ισομετρίες στο $\mathbb{R}^3$, ορθογώνιοι πίνακες, ισομετρίες σε ερμητιανούς χώρους, ορθομοναδιαίοι πίνακες.

Ασκήσεις

Να βρεθεί (αν υπάρχει) ισομετρία $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ τέτοια ώστε $f(4,3) = (5,0)$, όπου ο $\mathbb{R}^2$ είναι εφοδιασμένος με το συνήθες εσωτερικό γινόμενο.

Ασκήσεις

Να βρεθεί (αν υπάρχει) ισομετρία $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ τέτοια ώστε $f(4,3) = (5,0)$, όπου ο $\mathbb{R}^2$ είναι εφοδιασμένος με το συνήθες εσωτερικό γινόμενο. Παρατηρούμε αρχικά ότι

$\|(4,3)\| = \|f(4,3)\| = \|(5,0)\| = 5$. Θέτουμε $v_1 = (4,3)$. Αν $v_2 \perp v_1$ τότε πρέπει να ισχύει ότι $f(v_2) \perp f(v_1)$.

Ασκήσεις

Να βρεθεί (αν υπάρχει) ισομετρία $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ τέτοια ώστε $f(4,3) = (5,0)$, όπου ο $\mathbb{R}^2$ είναι εφοδιασμένος με το συνήθες εσωτερικό γινόμενο. Παρατηρούμε αρχικά ότι

$\|(4,3)\| = \|f(4,3)\| = \|(5,0)\| = 5$. Θέτουμε $v_1 = (4,3)$. Αν $v_2 \perp v_1$ τότε πρέπει να ισχύει ότι $f(v_2) \perp f(v_1)$.
Έστω $v_2 = (3,-4)$. Αφού $v_2 \perp v_1$ τότε $f(v_2) = (0,5)$ ή $f(v_2) = (0,-5)$. Έστω $f(v_2) = (0,5)$. Θεωρούμε $B = \{v_1, v_2\}, B' = \{w_1, w_2\}$ ορθογώνιες βάσεις του $\mathbb{R}^2$, όπου $w_1 = f(v_1), w_2 = f(v_2)$.

Ασκήσεις

Να βρεθεί (αν υπάρχει) ισομετρία $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ τέτοια ώστε $f(4,3) = (5,0)$, όπου ο $\mathbb{R}^2$ είναι εφοδιασμένος με το συνήθες εσωτερικό γινόμενο. Παρατηρούμε αρχικά ότι

$\|(4,3)\| = \|f(4,3)\| = \|(5,0)\| = 5$. Θέτουμε $v_1 = (4,3)$. Αν $v_2 \perp v_1$ τότε πρέπει να ισχύει ότι $f(v_2) \perp f(v_1)$.
Έστω $v_2 = (3,-4)$. Αφού $v_2 \perp v_1$ τότε $f(v_2) = (0,5)$ ή $f(v_2) = (0,-5)$. Έστω $f(v_2) = (0,5)$. Θεωρούμε $B = \{v_1, v_2\}, B' = \{w_1, w_2\}$ ορθογώνιες βάσεις του $\mathbb{R}^2$, όπου $w_1 = f(v_1), w_2 = f(v_2)$.

Άρα

$$\begin{aligned} f(e_1) &= \frac{4}{25} f(v_1) + \frac{3}{25} f(v_2) \\ &= \frac{4}{25}(5,0) + \frac{3}{25}(0,5) = (\frac{20}{25}, \frac{15}{25}) \end{aligned}$$

Άρα

$$f(e_1) = \frac{4}{25}f(v_1) + \frac{3}{25}f(v_2)$$
$$= \frac{4}{25}(5,0) + \frac{3}{25}(0,5) = (\frac{20}{25}, \frac{15}{25})$$

Όμοια,

$$f(e_2) = (\frac{15}{25}, -\frac{20}{25}).$$

Άρα

$$f(e_1) = \frac{4}{25}f(v_1) + \frac{3}{25}f(v_2)$$
$$= \frac{4}{25}(5,0) + \frac{3}{25}(0,5) = (\frac{20}{25}, \frac{15}{25})$$

Όμοια,

$$f(e_2) = (\frac{15}{25}, -\frac{20}{25}).$$

Παρατηρούμε ότι $\|f(e_1)| = \|f(e_1)| = 1, < f(e_1), f(e_2) >= 0$ δηλαδή έχουμε ισομετρία.

Άρα

$$f(e_1) = \frac{4}{25} f(v_1) + \frac{3}{25} f(v_2)$$
$$= \frac{4}{25}(5,0) + \frac{3}{25}(0,5) = (\frac{20}{25}, \frac{15}{25})$$

Όμοια,

$$f(e_2) = (\frac{15}{25}, -\frac{20}{25}).$$

Παρατηρούμε ότι $\|f(e_1)| = \|f(e_1)| = 1, < f(e_1), f(e_2) >= 0$ δηλαδή έχουμε ισομετρία.
Συγκεκριμένα $f(a,b) = \frac{5}{25}(4a + 3b, 3a - 4b)$.

Άρα

$$f(e_1) = \frac{4}{25} f(v_1) + \frac{3}{25} f(v_2)$$
$$= \frac{4}{25}(5,0) + \frac{3}{25}(0,5) = (\frac{20}{25}, \frac{15}{25})$$

Όμοια,

$$f(e_2) = (\frac{15}{25}, -\frac{20}{25}).$$

Παρατηρούμε ότι $\|f(e_1)| = \|f(e_1)| = 1, < f(e_1), f(e_2) >= 0$ δηλαδή έχουμε ισομετρία.
Συγκεκριμένα $f(a,b) = \frac{5}{25}(4a+3b, 3a-4b)$.
Η f δεν είναι περιστροφή.

Άρα

$$\begin{aligned} f(e_1) &= \frac{4}{25}f(v_1) + \frac{3}{25}f(v_2) \\ &= \frac{4}{25}(5,0) + \frac{3}{25}(0,5) = (\frac{20}{25}, \frac{15}{25}) \end{aligned}$$

Όμοια,

$$f(e_2) = (\frac{15}{25}, -\frac{20}{25}).$$

Παρατηρούμε ότι $\|f(e_1)| = \|f(e_1)| = 1, < f(e_1), f(e_2) >= 0$ δηλαδή έχουμε ισομετρία.
Συγκεκριμένα $f(a,b) = \frac{5}{25}(4a + 3b, 3a - 4b)$.
Η f δεν είναι περιστροφή.Η f είναι αντικατοπτρισμός.

Άρα

$$f(e_1) = \frac{4}{25} f(v_1) + \frac{3}{25} f(v_2)$$
$$= \frac{4}{25}(5,0) + \frac{3}{25}(0,5) = (\frac{20}{25}, \frac{15}{25})$$

Όμοια,

$$f(e_2) = (\frac{15}{25}, -\frac{20}{25}).$$

Παρατηρούμε ότι $\|f(e_1)| = \|f(e_1)| = 1, < f(e_1), f(e_2) >= 0$ δηλαδή έχουμε ισομετρία.
Συγκεκριμένα $f(a,b) = \frac{5}{25}(4a+3b, 3a-4b)$.
Η f δεν είναι περιστροφή.Η f είναι αντικατοπτρισμός.
Μόνο δυο είδη γραμμικών συναρτήσεων $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, περιστροφές και αντικατοπτρισμοί

Έστω τώρα ότι $f(v_2) = (0, -5)$. Τότε βρίσκουμε όμοια ότι $f(e_1) = (\frac{20}{25}, -\frac{15}{25}), f(e_2) = (\frac{15}{25}, \frac{20}{25})$.

Έστω τώρα ότι $f(v_2) = (0, -5)$. Τότε βρίσκουμε όμοια ότι $f(e_1) = (\frac{20}{25}, -\frac{15}{25}), f(e_2) = (\frac{15}{25}, \frac{20}{25})$.
Παρατήρηση: Έστω $f : V \to V$ ισομετρία, V Ευκλείδειος χώρος και λ ιδιοτιμή, δηλαδή υπάρχει $v \neq O$ έτσι ώστε $f(v) = \lambda v$.

Έστω τώρα ότι $f(v_2) = (0, -5)$. Τότε βρίσκουμε όμοια ότι $f(e_1) = (\frac{20}{25}, -\frac{15}{25}), f(e_2) = (\frac{15}{25}, \frac{20}{25})$.
Παρατήρηση: Έστω $f : V \to V$ ισομετρία, V Ευκλείδειος χώρος και λ ιδιοτιμή, δηλαδή υπάρχει $v \neq O$ έτσι ώστε $f(v) = \lambda v$. Τότε, αφού f ισομετρία, έχουμε

$$\|v\| = \|f(v)\| = \|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\| \Rightarrow |\lambda| = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1.$$

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Dr. Φωτιάδης Ανέστης

Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2013-14

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης