ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

Χαραλάμπους Χαρά

Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2013

Αριστοτέλειο
Πανεπιστήμιο
Θεσσαλονίκης

Χαραλάμπους Χαρά

Ενότητα 8. Ισομετρίες

Ασκήσεις

Χρηματοδότηση

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα. Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Σύνοψη

1 Ενότητα 8. Ισομετρίες
- Ασκήσεις

Σε αυτή την ενότητα θα μελετηθούν ισομετρίες, διατήρηση του εσωτερικού γινομένου και απεικόνιση ορθοκανονικής βάσης σε ορθοκανονική βάση, ισομετρίες στο επίπεδο: αντικατοπτρισμοί, περιστροφές, ισομετρίες στο $\mathbb{R}^3$, ορθογώνιοι πίνακες, ισομετρίες σε ερμητιανούς χώρους, ορθομοναδιαίοι πίνακες.

Ασκήσεις

Να δειχθεί ότι η $f : \mathbb{R}^n \Rightarrow \mathbb{R}^n, f(x) = 2proj_V x - x$ είναι ισομετρία, όπου V υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$.

Ασκήσεις

Να δειχθεί ότι η $f : \mathbb{R}^n \Rightarrow \mathbb{R}^n, f(x) = 2proj_V x - x$ είναι ισομετρία, όπου V υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$.

Υπενθυμίζουμε ότι
1. $\|f(v)\| = \|v\|, \forall v \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow$
2. $< v_1, v_2 >=< f(v_1), f(v_2) >, \forall v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow$
3. $\{v_1, \dots v_n\}$ ορθοκανονική βάση $\Rightarrow \{f(v_1), \dots f(v_n)\}$ ορθοκανονική βάση

Βήμα 1: Θεωρούμε $B_1 = \{v_1, \ldots, v_s\}$ μια ορθοκανονική βάση του V.

Βήμα 1: Θεωρούμε $B_1 = \{v_1, \ldots, v_s\}$ μια ορθοκανονική βάση του V.
Βήμα 2: α) Επεκτείνουμε τη βάση B_1 του V σε μια βάση $B_2 = \{v_1, \ldots, v_s, w_1, \ldots w_{n-s}\}$ του $\mathbb{R}^n$

Βήμα 1: Θεωρούμε $B_1 = \{v_1, \ldots, v_s\}$ μια ορθοκανονική βάση του V.
Βήμα 2: α) Επεκτείνουμε τη βάση B_1 του V σε μια βάση $B_2 = \{v_1, \ldots, v_s, w_1, \ldots w_{n-s}\}$ του $\mathbb{R}^n$
Βήμα 2: β) Μέσω του αλγόριθμου του Γραμ-Σςμιδτ παίρνουμε μια ορθοκανονική βάση $B = \{v_1, \ldots, v_s, u_1, \ldots u_{n-s}\}$ του $\mathbb{R}^n$
Παρατήρηση: $u_1, \ldots, u_{n-s} \in V^{\perp}$

Βήμα 1: Θεωρούμε $B_1 = \{v_1, \ldots, v_s\}$ μια ορθοκανονική βάση του V.
Βήμα 2: α) Επεκτείνουμε τη βάση B_1 του V σε μια βάση $B_2 = \{v_1, \ldots, v_s, w_1, \ldots w_{n-s}\}$ του $\mathbb{R}^n$
Βήμα 2: β) Μέσω του αλγόριθμου του Γραμ-Σςμιδτ παίρνουμε μια ορθοκανονική βάση $B = \{v_1, \ldots, v_s, u_1, \ldots u_{n-s}\}$ του $\mathbb{R}^n$
Παρατήρηση: $u_1, \ldots, u_{n-s} \in V^{\perp}$
Βήμα 3: Έχουμε $f(v_i) = v_i, \forall i = 1, \ldots s$ και $f(v_j) = v_j, \forall j = 1, \ldots n - s$
Συνεπώς, $B = \{v_1, \ldots, v_s, u_1, \ldots u_{n-s}\}$ ορθοκανονική βάση $\Rightarrow \{f(v_1), \ldots, f(v_s), f(u_1), \ldots f(u_{n-s})\}$ ορθοκανονική βάση άρα f ισομετρία.

Παρατηρούμε ότι η f είναι πράγματι γραμμική συνάρτηση γιατί είναι η διαφορά δυο γραμμικών συναρτήσεων, των $g_1(x) = proj_V x$ και $g_2(x) = x = id(x)$.

Πρόταση: V υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$, με το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, g(x) = proj_V x$. Τότε η g είναι γραμμική.

Παρατηρούμε ότι η f είναι πράγματι γραμμική συνάρτηση γιατί είναι η διαφορά δυο γραμμικών συναρτήσεων, των $g_1(x) = proj_V x$ και $g_2(x) = x = id(x)$.
Πρόταση: V υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$, με το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, g(x) = proj_V x$. Τότε η g είναι γραμμική.
Απόδειξη: Θεωρούμε $B_1 = \{v_1, \dots, v_s\}$ μια ορθοκανονική βάση του V. Τότε

$$\begin{aligned} proj_V(x) &= proj_{v_1} x + \dots proj_{v_s} x \\ &= < x, v_1 > v_1 + \dots < x, v_s > v_s \end{aligned}$$

. Άρα $g(x+y) = g(x) + g(y)$, αφού $< x+y, v_i > = < x, v_i > + < y, v_i >, \forall i = 1, \dots, s$.

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Dr. Φωτιάδης Ανέστης

Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2013-14

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης