ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ II

Χαραλάμπους Χαρά

Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2013

Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Χρηματοδότηση

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα. Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Σύνοψη

1 Ενότητα 8. Ισομετρίες

Σε αυτή την ενότητα θα μελετηθούν ισομετρίες, διατήρηση του εσωτερικού γινομένου και απεικόνιση ορθοκανονικής βάσης σε ορθοκανονική βάση, ισομετρίες στο επίπεδο: αντικατοπτρισμοί, περιστροφές, ισομετρίες στο $\mathbb{R}^3$, ορθογώνιοι πίνακες, ισομετρίες σε ερμητιανούς χώρους, ορθομοναδιαίοι πίνακες.

Συνέχεια Άσκησης

Ισχύει $g(cx) = cg(x)$ αφού

$$\begin{aligned} g(cx) = proj_V(cx) &= proj_{v_1} cx + \dots proj_{v_s} cx \\ &= < cx, v_1 > v_1 + \dots < cx, v_s > v_s \\ &= c < x, v_1 > v_1 + \dots c < x, v_s > v_s \\ &= c proj_V x = cg(x) \end{aligned}$$

Συνέχεια Άσκησης

Ισχύει $g(cx) = cg(x)$ αφού

$$\begin{aligned} g(cx) = proj_V(cx) &= proj_{v_1} cx + \ldots proj_{v_s} cx \\ &= < cx, v_1 > v_1 + \ldots < cx, v_s > v_s \\ &= c < x, v_1 > v_1 + \ldots c < x, v_s > v_s \\ &= c proj_V x = cg(x) \end{aligned}$$

Ερώτημα: Θα μπορούσαμε να έχουμε V υπόχωρο του $\mathbb{C}^n$ και $g : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$;

Συνέχεια Άσκησης

Ισχύει $g(cx) = cg(x)$ αφού

$$\begin{aligned} g(cx) = proj_V(cx) &= proj_{v_1} cx + \ldots proj_{v_s} cx \\ &= < cx, v_1 > v_1 + \ldots < cx, v_s > v_s \\ &= c < x, v_1 > v_1 + \ldots c < x, v_s > v_s \\ &= c proj_V x = cg(x) \end{aligned}$$

Ερώτημα: Θα μπορούσαμε να έχουμε V υπόχωρο του $\mathbb{C}^n$ και $g : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$;
Η $f : \mathbb{C}^n \Rightarrow \mathbb{C}^n$, είναι ισομετρία, όπου V υπόχωρος του ^{n}. αν $\|f(v)\| = \|v\|, \forall v \in \mathbb{C}^n$.

Πρόταση: $\|f(v)\| = \|v\|, \forall v \in \mathbb{C}^n$ Τότε $< v_1, v_2 >=< f(v_1), f(v_2) >, \forall v_1, v_2 \in \mathbb{C}^n$

Πρόταση: $\|f(v)\| = \|v\|, \forall v \in \mathbb{C}^n$ Τότε
$< v_1, v_2 > = < f(v_1), f(v_2) >, \forall v_1, v_2 \in \mathbb{C}^n$
Απόδειξη:

$$\begin{aligned} A &= < f(v_1 + v_2), f(v_1 + v_2) > \\ &= < f(v_1), f(v_1) > + < f(v_1), f(v_2) > + \\ &\quad < f(v_2), f(v_1) > + < f(v_2), f(v_2) >, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= < v_1 + v_2, v_1 + v_2 > \\ &= < v_1, v_1 > + < v_1, v_2 > + < v_2, v_1 > + < v_2, v_2 > \end{aligned}$$

Πρόταση: $\|f(v)\| = \|v\|, \forall v \in \mathbb{C}^n$ Τότε
$< v_1, v_2 >=< f(v_1), f(v_2) >, \forall v_1, v_2 \in \mathbb{C}^n$
Απόδειξη:

$$\begin{aligned} A &=< f(v_1 + v_2), f(v_1 + v_2) > \\ &= < f(v_1), f(v_1) > + < f(v_1), f(v_2) > + \\ &\quad < f(v_2), f(v_1) > + < f(v_2), f(v_2) >, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= < v_1 + v_2, v_1 + v_2 > \\ &=< v_1, v_1 > + < v_1, v_2 > + < v_2, v_1 > + < v_2, v_2 > \end{aligned}$$

Άρα έχουμε ότι

$$< f(v_1), f(v_2) > + < f(v_2), f(v_1) >=< v_1, v_2 > + < v_2, v_1 > \tag{1}$$

Πρόταση: $\|f(v)\| = \|v\|, \forall v \in \mathbb{C}^n$ Τότε $< v_1, v_2 >=< f(v_1), f(v_2) >, \forall v_1, v_2 \in \mathbb{C}^n$

Απόδειξη:

$$
\begin{aligned}
A &=< f(v_1 + v_2), f(v_1 + v_2) > \\
&= < f(v_1), f(v_1) > + < f(v_1), f(v_2) > + \\
&\quad < f(v_2), f(v_1) > + < f(v_2), f(v_2) >, \\
B &= < v_1 + v_2, v_1 + v_2 > \\
&=< v_1, v_1 > + < v_1, v_2 > + < v_2, v_1 > + < v_2, v_2 >
\end{aligned}
$$

Άρα έχουμε ότι

$$< f(v_1), f(v_2) > + < f(v_2), f(v_1) >=< v_1, v_2 > + < v_2, v_1 > \quad (1)$$

Άρα έχουμε ότι

$$< f(v_1), f(iv_2) > + < f(iv_2), f(v_1) >=< v_1, iv_2 > + < iv_2, v_1 >$$

Άρα έχουμε

$$-i < f(v_1), f(v_2) > +i < f(v_2), f(v_1) >=$$
$$-i < v_1, v_2 > +i < v_2, v_1 > \Rightarrow$$
$$< f(v_1), f(v_2) > - < f(v_2), f(v_1) >=< v_1, v_2 > - < v_2, v_1 > \quad (2)$$

Άρα έχουμε

$$-i < f(v_1), f(v_2) > +i < f(v_2), f(v_1) >=$$
$$-i < v_1, v_2 > +i < v_2, v_1 > \Rightarrow$$
$$< f(v_1), f(v_2) > - < f(v_2), f(v_1) > = < v_1, v_2 > - < v_2, v_1 > \quad (2)$$

Προσθέτουμε τις σχέσεις (1) και (1) και βρίσκουμε ότι

$$< v_1, v_2 > = < f(v_1), f(v_2) >$$

Παράδειγμα

$f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2, f(a,b) = (ib, -a)$

Η συνάρτηση f είναι ισομετρία.

Παράδειγμα

$f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2, f(a, b) = (ib, -a)$
Η συνάρτηση f είναι ισομετρία.
Πράγματι παρατηρούμε ότι για την ορθοκανονική βάση $\{(1, 0), (0, 1)\}$ του $\mathbb{C}^2$ έχουμε $f(1, 0) = (0, -1), f(0, 1) = (i, 0)$ και $\{(0, -1), (i, 0)\}$ είναι ορθοκανονική βάση του $\mathbb{C}^2$ άρα η f είναι ισομετρία.

Παράδειγμα

$f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2, f(a,b) = (ib, -a)$
Η συνάρτηση f είναι ισομετρία.
Πράγματι παρατηρούμε ότι για την ορθοκανονική βάση $\{(1,0),(0,1)\}$ του $\mathbb{C}^2$ έχουμε $f(1,0) = (0,-1), f(0,1) = (i,0)$ και $\{(0,-1),(i,0)\}$ είναι ορθοκανονική βάση του $\mathbb{C}^2$ άρα η f είναι ισομετρία.
Ο πίνακας της f ως προς την κανονική βάση είναι

$$A_f = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, det(A_f) = i \Rightarrow |det(A_f)| = 1$$

Παρατηρούμε ότι $A_f^T \overline{A_f} = I$

Γενικότερα ισχύει ότι αν $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ τότε f ισομετρία $\Leftrightarrow A^T \overline{A} = I_n$, όπου $A = A_f$ ως προς μία ορθοκανονική βάση $e_1, e_2, \ldots, e_n$

Γενικότερα ισχύει ότι αν $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ τότε f ισομετρία $\Leftrightarrow A^T\overline{A} = I_n$, όπου $A = A_f$ ως προς μία ορθοκανονική βάση $e_1, e_2, \ldots, e_n$
Αλλά παρατηρούμε ότι

$$A^T\overline{A} = I_n \Leftrightarrow$$
$$\overline{A}^T {A^T}^T = I_n \Leftrightarrow$$
$$\overline{A}^T A = I_n \Leftrightarrow$$
$$A^{-1} = \overline{A^T}$$

Επίσης, ισχύει γενικότερα ότι αν f τότε $|det(A)| = 1$, όπου $A = A_f$

Επίσης, ισχύει γενικότερα ότι αν f τότε $|det(A)| = 1$, όπου $A = A_f$

Πράγματι, έχουμε

$$\begin{aligned} A^T\overline{A} = I_n &\Leftrightarrow \\ det\left(A^T\overline{A}\right) = 1 &\Leftrightarrow \\ det(A^T)det(\overline{A}) = 1 &\Leftrightarrow \\ det(A^T)\overline{det(A)} = 1 &\Leftrightarrow \\ |det(A)| = 1 & \end{aligned}$$

Άρα υπάρχουν άπειρες πιθανές τιμές για την ορίζουσα $det(A)$

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Dr. Φωτιάδης Ανέστης

Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2013-14

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης