ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

Χαραλάμπους Χαρά

Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2013

Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα. Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Σύνοψη

1 Ενότητα 8. Ισομετρίες

Σε αυτή την ενότητα θα μελετηθούν ισομετρίες, διατήρηση του εσωτερικού γινομένου και απεικόνιση ορθοκανονικής βάσης σε ορθοκανονική βάση, ισομετρίες στο επίπεδο: αντικατοπτρισμοί, περιστροφές, ισομετρίες στο $\mathbb{R}^3$, ορθογώνιοι πίνακες, ισομετρίες σε ερμητιανούς χώρους, ορθομοναδιαίοι πίνακες.

Ισομετρίες στο επίπεδο

Θεωρούμε τον $\mathbb{R}-$ διανυσματικό χώρο V διάστασης 2, τότε ο V είναι ισόμορφος με τον $\mathbb{R}^2$. Ας είναι $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ισομετρία.

Ισομετρίες στο επίπεδο

Θεωρούμε τον $\mathbb{R}-$ διανυσματικό χώρο V διάστασης 2, τότε ο V είναι ισόμορφος με τον $\mathbb{R}^2$. Ας είναι $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ισομετρία.
Αν $B = \{e_1, e_2\}$ η κανονική βάση τότε ισχύει $\overline{A^T}A = I_2$, δηλαδή $A^{-1} = \overline{A^T} = A^T$

Ισομετρίες στο επίπεδο

Θεωρούμε τον $\mathbb{R}-$ διανυσματικό χώρο V διάστασης 2, τότε ο V είναι ισόμορφος με τον $\mathbb{R}^2$. Ας είναι $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ισομετρία.

Αν $B = \{e_1, e_2\}$ η κανονική βάση τότε ισχύει $\overline{A^T}A = I_2$, δηλαδή $A^{-1} = \overline{A^T} = A^T$

Έστω

$$A = A_f = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, |det(A_f)| = 1$$

τότε $f(1,0) = (a,c), f(0,1) = (b,d)$ και $det(A_f) = \pm 1$ (αν υπάρχουν πραγματικές ιδοτιμές τότε είναι ± 1)

Γνωρίζουμε ότι

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

Ας υποθέσουμε ότι $det(A_f) = 1$, τότε βρίσκουμε ότι $d = a, c = -b$ και $a^2 + c^2 = 1$.

Γνωρίζουμε ότι

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

Ας υποθέσουμε ότι $det(A_f) = 1$, τότε βρίσκουμε ότι $d = a, c = -b$ και $a^2 + c^2 = 1$.
Άρα

$$A_f = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Τότε η f είναι περιστροφή γύρω από την αρχή των αξόνων κατά μια γωνία ϕ

Ας υποθέσουμε τώρα ότι $det(A_f) = 1$, τότε βρίσκουμε ότι $d = -a, c = b$ και $a^2 + c^2 = 1$.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι $det(A_f) = 1$, τότε βρίσκουμε ότι $d = -a, c = b$ και $a^2 + c^2 = 1$.Άρα

$$A_f = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$$

Τότε η f είναι αντικατοπτρισμός

Ας είναι $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ισομετρίες. Θεωρούμε τη σύνθεση $g \circ f$.

Ας είναι $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ισομετρίες. Θεωρούμε τη σύνθεση $g \circ f$.
Παρατηρούμε ότι $\|v\| = \|f(v)\| = \|g \circ f(v)\|$, δηλαδή η σύνθεση δυο ισομετριών είναι ισομετρία.

Ας είναι $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ισομετρίες. Θεωρούμε τη σύνθεση $g \circ f$.
Παρατηρούμε ότι $\|v\| = \|f(v)\| = \|g \circ f(v)\|$, δηλαδή η σύνθεση δυο ισομετριών είναι ισομετρία.
Έστω $B = \{e_1, e_2\}$ η κανονική βάση και $A_1 = A_f, A_2 = A_g$ τότε $A_{g \circ f} = A_2 A_1$

Έστω $f_1, f_4 \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ περιστροφές κατά γωνίες ϕ_1, ϕ_2 και $f_2, f_3 \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ αντικατοπτρισμοί ως προς ευθείες l_1, l_2.

Έστω $f_1, f_4 \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ περιστροφές κατά γωνίες ϕ_1, ϕ_2 και $f_2, f_3 \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ αντικατοπτρισμοί ως προς ευθείες l_1, l_2.
Ερώτημα 1: $f_1 \circ f_2 \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ είναι περιστροφή ή αντικατοπτρισμός;

Έστω $f_1, f_4 \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ περιστροφές κατά γωνίες ϕ_1, ϕ_2 και $f_2, f_3 \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ αντικατοπτρισμοί ως προς ευθείες l_1, l_2.
Έρώτημα 1: $f_1 \circ f_2 \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ είναι περιστροφή ή αντικατοπτρισμός;
Απάντηση: Είναι αντικατοπτρισμός αφού
$det(f_1 \circ f_2) = det(f_1) det(f_2) = -1.$

Έστω $f_1, f_4 \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ περιστροφές κατά γωνίες ϕ_1, ϕ_2 και $f_2, f_3 \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ αντικατοπτρισμοί ως προς ευθείες l_1, l_2.
Ερώτημα 1: $f_1 \circ f_2 \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ είναι περιστροφή ή αντικατοπτρισμός;
Απάντηση: Είναι αντικατοπτρισμός αφού $det(f_1 \circ f_2) = det(f_1) det(f_2) = -1$.
Είναι αντικατοπτρισμός ως προς ποιά ευθεία; Είναι $f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1$;

Έστω $f_1, f_4 \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ περιστροφές κατά γωνίες ϕ_1, ϕ_2 και $f_2, f_3 \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ αντικατοπτρισμοί ως προς ευθείες l_1, l_2.
Ερώτημα 1: $f_1 \circ f_2 \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ είναι περιστροφή ή αντικατοπτρισμός;
Απάντηση: Είναι αντικατοπτρισμός αφού $det(f_1 \circ f_2) = det(f_1)det(f_2) = -1$.
Είναι αντικατοπτρισμός ως προς ποιά ευθεία; Είναι $f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1$;
Ερώτημα 2: $f_1 \circ f_4 \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ είναι περιστροφή ή αντικατοπτρισμός;

Έστω $f_1, f_4 \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ περιστροφές κατά γωνίες ϕ_1, ϕ_2 και $f_2, f_3 \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ αντικατοπτρισμοί ως προς ευθείες l_1, l_2.
Ερώτημα 1: $f_1 \circ f_2 \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ είναι περιστροφή ή αντικατοπτρισμός;
Απάντηση: Είναι αντικατοπτρισμός αφού $det(f_1 \circ f_2) = det(f_1)det(f_2) = -1$.
Είναι αντικατοπτρισμός ως προς ποιά ευθεία; Είναι $f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1$;
Ερώτημα 2: $f_1 \circ f_4 \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ είναι περιστροφή ή αντικατοπτρισμός;
Απάντηση: Είναι περιστροφή κατά γωνία $\phi_1 + \phi_2$ και ισχύει $f_1 \circ f_4 = f_4 \circ f_1$

Ερώτημα 3: $f_2 \circ f_3 \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ είναι περιστροφή ή αντικατοπτρισμός;

Έρωτημα 3: $f_2 \circ f_3 \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ είναι περιστροφή ή αντικατοπτρισμός;
Απάντηση: Είναι περιστροφή αφού $det(f_2 \circ f_3) = det(f_2)det(f_3) = 1$.

Έρώτημα 3: $f_2 \circ f_3 \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ είναι περιστροφή ή αντικατοπτρισμός;
Απάντηση: Είναι περιστροφή αφού
$det(f_2 \circ f_3) = det(f_2)det(f_3) = 1.$
Ποιά η γωνία περιστροφής; Είναι $f_2 \circ f_3 = f_3 \circ f_2$;

Θα μελετήσουμε τώρα $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ισομετρία.

Θα μελετήσουμε τώρα $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ισομετρία.
Ταυτοτική συνάρτηση I_2 στον $\mathbb{R}^2$ είναι περιστροφή κατά γωνία $\phi = 0$ και έχει ιδιοτιμές $\lambda = 1$. Αλγεβρική και γεωμετρική πολλαπλότητα 2. $p_{I_2}(x) = (x-1)^2$, $V_1 = \mathbb{R}^2$

Θα μελετήσουμε τώρα $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ισομετρία.
Ταυτοτική συνάρτηση I_2 στον $\mathbb{R}^2$ είναι περιστροφή κατά γωνία $\phi = 0$ και έχει ιδιοτιμές $\lambda = 1$. Αλγεβρική και γεωμετρική πολλαπλότητα 2. $p_{I_2}(x) = (x-1)^2$, $V_1 = \mathbb{R}^2$
Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ περιστροφή κατά γωνία $\phi = \pi$. Έχει ιδιοτιμές $\lambda = -1$ και ιδιοδιανύσματα όλα τα διανύσματα. Αλγεβρική και γεωμετρική πολλαπλότητα 2. $p_f(x) = (x+1)^2$

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Dr. Φωτιάδης Ανέστης

Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2013-14

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης