ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

Χαραλάμπους Χαρά

Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2013

Αριστοτέλειο
Πανεπιστήμιο
Θεσσαλονίκης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα. Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Σύνοψη

Σε αυτή την ενότητα θα μελετηθούν ισομετρίες, διατήρηση του εσωτερικού γινομένου και απεικόνιση ορθοκανονικής βάσης σε ορθοκανονική βάση, ισομετρίες στο επίπεδο: αντικατοπτρισμοί, περιστροφές, ισομετρίες στο $\mathbb{R}^3$, ορθογώνιοι πίνακες, ισομετρίες σε ερμητιανούς χώρους, ορθομοναδιαίοι πίνακες.

Ασκήσεις

$$\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \phi(x, y) = (x + 3y, 2x + y)$$

Ασκήσεις

$\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \phi(x, y) = (x + 3y, 2x + y)$
Έχουμε

$$A_\phi = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

Ασκήσεις

$\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \phi(x, y) = (x + 3y, 2x + y)$

Έχουμε

$$A_\phi = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_\phi^* = \overline{(A_\phi)^T} = (\overline{A_\phi})^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Ασκήσεις

$\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \phi(x, y) = (x + 3y, 2x + y)$
Έχουμε

$$A_\phi = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_\phi^* = \overline{(A_\phi)^T} = (\overline{A_\phi})^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Άρα

$$\phi(x, y) = (x + 2y, 3x + y)$$

$$f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2, f(z_1, z_2) = (z_1 + 2iz_2, iz_1 + (1+i)z_2)$$

$f:\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2, f(z_1,z_2) = (z_1 + 2iz_2, iz_1 + (1+i)z_2)$Έχουμε

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ i & 1+i \end{pmatrix},$$

$$f:\mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2, f(z_1,z_2)=(z_1+2iz_2, iz_1+(1+i)z_2)$$ Έχουμε

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ i & 1+i \end{pmatrix},$$

$$A_\phi^* = \overline{(A_\phi)^T} = (\overline{A_\phi})^T = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -2i & 1-i \end{pmatrix}$$

$f:\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2, f(z_1,z_2) = (z_1 + 2iz_2, iz_1 + (1+i)z_2)$Έχουμε

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ i & 1+i \end{pmatrix},$$

$$A_\phi^* = \overline{(A_\phi)^T} = (\overline{A_\phi})^T = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -2i & 1-i \end{pmatrix}$$

Άρα

$$f(z_1,z_2) = (z_1 - iz_2, -2iz_1 + (1-i)z_2)$$

Σύνηθες εσωτερικό γινόμενο

Αν $v = (a_1, \dots, a_n), w = (b_1, \dots, b_n)$ τότε

$$< v, w >= a_1\overline{b_1} + \dots a_n\overline{b_n} = \sum_{i=1}^{n} a_i\overline{b_i} = v^T\overline{w}$$

Σύνηθες εσωτερικό γινόμενο

Αν $v = (a_1, \ldots, a_n), w = (b_1, \ldots, b_n)$ τότε

$$< v, w >= a_1\overline{b_1} + \ldots a_n\overline{b_n} = \sum_{i=1}^{n} a_i\overline{b_i} = v^T\overline{w}$$

Συμβολισμός

$$\phi(v) = A \cdot v,$$

Σύνηθες εσωτερικό γινόμενο

Αν $v = (a_1, \ldots, a_n), w = (b_1, \ldots, b_n)$ τότε

$$< v, w >= a_1\overline{b_1} + \ldots a_n\overline{b_n} = \sum_{i=1}^{n} a_i\overline{b_i} = v^T\overline{w}$$

Συμβολισμός

$$\phi(v) = A \cdot v,$$

$$\begin{aligned} < \phi(v), w > &=< Av, w > \\ &= (Av)^T\overline{w} \\ &= (v^T A^T)\overline{w} = v^T(A^T\overline{w}) \\ &= v^T\overline{(\overline{A^T} w)} =< v, \overline{A^T} w >=< v, A^* w > \end{aligned}$$

Σύνηθες εσωτερικό γινόμενο

Αν $v = (a_1, \dots, a_n), w = (b_1, \dots, b_n)$ τότε

$$< v, w >= a_1\overline{b_1} + \dots a_n\overline{b_n} = \sum_{i=1}^{n} a_i\overline{b_i} = v^T\overline{w}$$

Συμβολισμός

$$\phi(v) = A \cdot v,$$

$$\begin{aligned} < \phi(v), w > &=< Av, w > \\ &= (Av)^T\overline{w} \\ &= (v^T A^T)\overline{w} = v^T(A^T\overline{w}) \\ &= v^T\overline{(\overline{A^T}w)} =< v, \overline{A^T}w >=< v, A^*w > \end{aligned}$$

Άρα

$$< \phi(v), w >=< v, \phi^*(w) >$$

Παράδειγμα

$\phi : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3, \phi(z_1, z_2, z_3) = (iz_1, z_1 + (1+i)z_2 + 2iz_3, 4z_3)$.
Έστω $w = (1, i, i)$. Να βρεθεί διάνυσμα w' έτσι ώστε για κάθε $v \in \mathbb{C}^3$ να ισχύει $< \phi(v), w > = < v, w' >$

Παράδειγμα

$\phi : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3, \phi(z_1, z_2, z_3) = (iz_1, z_1 + (1+i)z_2 + 2iz_3, 4z_3)$. Έστω $w = (1, i, i)$. Να βρεθεί διάνυσμα w' έτσι ώστε για κάθε $v \in \mathbb{C}^3$ να ισχύει $< \phi(v), w > = < v, w' >$Έχουμε

$$A = A_\phi = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 1 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

Παράδειγμα

$\phi : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3, \phi(z_1, z_2, z_3) = (iz_1, z_1 + (1+i)z_2 + 2iz_3, 4z_3)$. Έστω $w = (1, i, i)$. Να βρεθεί διάνυσμα w' έτσι ώστε για κάθε $v \in \mathbb{C}^3$ να ισχύει $< \phi(v), w > = < v, w' >$Έχουμε

$$A = A_\phi = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 1 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

$$A^* = \begin{pmatrix} -i & 1 & 0 \\ 0 & 1-i & 0 \\ 0 & -2i & 4 \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα

$\phi : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3, \phi(z_1, z_2, z_3) = (iz_1, z_1 + (1+i)z_2 + 2iz_3, 4z_3)$.
Έστω $w = (1, i, i)$. Να βρεθεί διάνυσμα w' έτσι ώστε για κάθε $v \in \mathbb{C}^3$ να ισχύει $< \phi(v), w >=< v, w' >$Έχουμε

$$A = A_\phi = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 1 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

$$A^* = \begin{pmatrix} -i & 1 & 0 \\ 0 & 1-i & 0 \\ 0 & -2i & 4 \end{pmatrix}$$

Άρα $\phi^*(z_1, z_2, z_3) = (iz_1 + z_2, (1-i)z_2, -2iz_2 + 4z_3)$ και συνεπώς $w' = \phi^*(w) = (0, i+1, 2+4i)$

Χαρακτηρισμός ισομετρίας

ϕ ισομετρία $\Leftrightarrow A_{\phi} \cdot A_{\phi^*}$, όπου A_{ϕ} ο πίνακας της ϕ στην κανονική βάση

Χαρακτηρισμός ισομετρίας

ϕ ισομετρία $\Leftrightarrow A_\phi \cdot A_{\phi^*}$, όπου A_ϕ ο πίνακας της ϕ στην κανονική βάση

Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε την απεικόνιση
$\phi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2, \phi(x, y) = (-iy, x)$

Χαρακτηρισμός ισομετρίας

ϕ ισομετρία $\Leftrightarrow A_\phi \cdot A_{\phi^*}$, όπου A_ϕ ο πίνακας της ϕ στην κανονική βάση
Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε την απεικόνιση
$\phi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2, \phi(x, y) = (-iy, x)$
Έχουμε

$$A_\phi = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

ορθογώνιες στήλες με μήκος 1 και απεικονίζει την κανονική βάση σε μια άλλη ορθοκανονική βάση, άρα είναι ισομετρία.

Χαρακτηρισμός ισομετρίας

ϕ ισομετρία $\Leftrightarrow A_\phi \cdot A_{\phi^*}$, όπου A_ϕ ο πίνακας της ϕ στην κανονική βάση
Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε την απεικόνιση
$\phi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2, \phi(x, y) = (-iy, x)$
Έχουμε

$$A_\phi = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

ορθογώνιες στήλες με μήκος 1 και απεικονίζει την κανονική βάση σε μια άλλη ορθοκανονική βάση, άρα είναι ισομετρία.
Έχουμε

$$A_{\phi^*} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

Χαρακτηρισμός ισομετρίας

ϕ ισομετρία $\Leftrightarrow A_\phi \cdot A_{\phi^*}$, όπου A_ϕ ο πίνακας της ϕ στην κανονική βάση
Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε την απεικόνιση
$\phi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2, \phi(x, y) = (-iy, x)$
Έχουμε

$$A_\phi = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

ορθογώνιες στήλες με μήκος 1 και απεικονίζει την κανονική βάση σε μια άλλη ορθοκανονική βάση, άρα είναι ισομετρία.
Έχουμε

$$A_{\phi^*} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

Άρα $\phi^*(x, y) = (y, ix)$. Παρατηρούμε ότι $\phi^* = \phi^{-1}$ και $A_{\phi^*} A_\phi = I_2$.

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Dr. Φωτιάδης Ανέστης

Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2013-14

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης