ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

Χαραλάμπους Χαρά

Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2013

Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα. Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Σύνοψη

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε Προσαρτημένους πίνακεσ, φασματικό θεώρημα, Αυτοπροσαρτημένες γραμμικές συναρτήσεις και ιδιοτιμές τους

Ιδιοτιμές - Ιδιοδιανύσματα

λ ιδιοτιμή της γραμμικής $\phi : V \to V$ αν υπάρχει $v \in V, v \neq O : \phi(v) = \lambda v$. Το v λέγεται ιδιοδιάνυσμα.

Ιδιοτιμές - Ιδιοδιανύσματα

λ ιδιοτιμή της γραμμικής $\phi : V \to V$ αν υπάρχει $v \in V, v \neq O : \phi(v) = \lambda v$. Το v λέγεται ιδιοδιάνυσμα.
λ ιδιοτιμή του πίνακα $A \Leftrightarrow det(A - \lambda I) = 0$

Ιδιοτιμές - Ιδιοδιανύσματα

λ ιδιοτιμή της γραμμικής $\phi : V \to V$ αν υπάρχει $v \in V, v \neq O : \phi(v) = \lambda v$. Το v λέγεται ιδιοδιάνυσμα.

λ ιδιοτιμή του πίνακα $A \Leftrightarrow det(A - \lambda I) = 0$

Θυμίζουμε ότι $A^* = \overline{A}^T, det(B) = det(B^T) = det(\overline{B})$. Άρα λ ιδιοτιμή $\Rightarrow det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow 0 = det(\overline{A - \lambda I}) = det(\overline{A} - \overline{\lambda I}) = det(\overline{A} - \overline{\lambda} I) \Rightarrow det\left((\overline{A} - \overline{\lambda} I)^T\right) = det(A^* - \overline{\lambda} I) = 0$

Ιδιοτιμές - Ιδιοδιανύσματα

λ ιδιοτιμή της γραμμικής $\phi : V \to V$ αν υπάρχει $v \in V, v \neq O : \phi(v) = \lambda v$. Το v λέγεται ιδιοδιάνυσμα.
λ ιδιοτιμή του πίνακα $A \Leftrightarrow det(A - \lambda I) = 0$
Θυμίζουμε ότι $A^* = \overline{A}^T, det(B) = det(B^T) = det(\overline{B})$. Άρα λ ιδιοτιμή
$\Rightarrow det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow 0 = det(\overline{A - \lambda I}) = det(\overline{A} - \overline{\lambda I}) = det(\overline{A} - \overline{\lambda} I) \Rightarrow det\left((\overline{A} - \overline{\lambda} I)^T\right) = det(A^* - \overline{\lambda} I) = 0$Άρα λ

ιδιοτιμή του $A \Rightarrow \overline{\lambda}$ ιδιοτιμή του A^*.
Ερώτημα: Ισχύει ότι αν $\overline{\lambda}$ ιδιοτιμή του $A^* \Rightarrow \lambda$ ιδιοτιμή του A;

Σύμφωνα με ότι αποδείξαμε προηγουμένως έπεται ότι $\overline{\lambda}$ ιδιοτιμή του $A^* \Rightarrow \overline{\overline{\lambda}}$ ιδιοτιμή του $(A^*)^*$.

Σύμφωνα με ότι αποδείξαμε προηγουμένως έπεται ότι $\overline{\lambda}$ ιδιοτιμή του $A^* \Rightarrow \overline{\overline{\lambda}}$ ιδιοτιμή του $(A^*)^*$.

Αλλά $\overline{\overline{\lambda}} = \lambda$ και

$$(A^*)^* = (\overline{A^*})^T = \left(\overline{(\overline{A})^T}\right)^T = (\overline{\overline{A}^T})^T = \overline{\overline{A}} = A$$

Σύμφωνα με ότι αποδείξαμε προηγουμένως έπεται ότι $\overline{\lambda}$ ιδιοτιμή του $A^* \Rightarrow \overline{\overline{\lambda}}$ ιδιοτιμή του $(A^*)^*$.

Αλλά $\overline{\overline{\lambda}} = \lambda$ και

$(A^*)^* = (\overline{A^*})^T = \left(\overline{(\overline{A})^T}\right)^T = \overline{(\overline{A}^T)^T} = \overline{\overline{A}} = A$

Άρα λ ιδιοτιμή του $A \Leftrightarrow \overline{\lambda}$ ιδιοτιμή του A^*.

Σύμφωνα με ότι αποδείξαμε προηγουμένως έπεται ότι $\overline{\lambda}$ ιδιοτιμή του $A^* \Rightarrow \overline{\overline{\lambda}}$ ιδιοτιμή του $(A^*)^*$.

Αλλά $\overline{\overline{\lambda}} = \lambda$ και

$(A^*)^* = (\overline{A^*})^T = \left(\overline{(\overline{A})^T}\right)^T = (\overline{\overline{A}^T})^T = \overline{\overline{A}} = A$

Άρα λ ιδιοτιμή του $A \Leftrightarrow \overline{\lambda}$ ιδιοτιμή του A^*.

Ακόμα, είδαμε ότι $(A^*)^* = A$ και άρα $(\phi^*)^* = \phi$

Σύμφωνα με ότι αποδείξαμε προηγουμένως έπεται ότι $\overline{\lambda}$ ιδιοτιμή του $A^* \Rightarrow \overline{\overline{\lambda}}$ ιδιοτιμή του $(A^*)^*$.

Αλλά $\overline{\overline{\lambda}} = \lambda$ και

$$(A^*)^* = (\overline{A^*})^T = \left(\overline{(\overline{A})^T}\right)^T = \overline{(\overline{A}^T)^T} = \overline{\overline{A}} = A$$

Άρα λ ιδιοτιμή του $A \Leftrightarrow \overline{\lambda}$ ιδιοτιμή του A^*.

Ακόμα, είδαμε ότι $(A^*)^* = A$ και άρα $(\phi^*)^* = \phi$

Ερώτημα: Ποιά είναι η σχέση ανάμεσα στο $P_A(x)$ και στο $P_{A^*}(x)$

Αυτοπροσαρτημένοι πίνακες και συναρτήσεις

Ορισμός: Η ϕ λέγεται αυτοπροσαρτημένη αν $\phi^* = \phi$. Ο A λέγεται αυτοπροσαρτημένος αν $A^* = A$.

Αυτοπροσαρτημένοι πίνακες και συναρτήσεις

Ορισμός: Η ϕ λέγεται αυτοπροσαρτημένη αν $\phi^* = \phi$. Ο A λέγεται αυτοπροσαρτημένος αν $A^* = A$.

Παράδειγμα 1: Ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ δεν είναι αυτοπροσαρτημένος.

Αυτοπροσαρτημένοι πίνακες και συναρτήσεις

Ορισμός: Η ϕ λέγεται αυτοπροσαρτημένη αν $\phi^* = \phi$. Ο A λέγεται αυτοπροσαρτημένος αν $A^* = A$.

Παράδειγμα 1: Ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ δεν είναι αυτοπροσαρτημένος.

Αν $A \in M_n(\mathbb{R})$ τότε $A^* = A$ αν $A^T = A$ (αν A συμμετρικός)

Αυτοπροσαρτημένοι πίνακες και συναρτήσεις

Ορισμός: Η ϕ λέγεται αυτοπροσαρτημένη αν $\phi^* = \phi$. Ο A λέγεται αυτοπροσαρτημένος αν $A^* = A$.

Παράδειγμα 1: Ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ δεν είναι αυτοπροσαρτημένος.

Αν $A \in M_n(\mathbb{R})$ τότε $A^* = A$ αν $A^T = A$ (αν A συμμετρικός)

Παράδειγμα 2: Ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 1+i & i \\ a & 2 & 2i \\ b & c & 3 \end{pmatrix}$ να βρεθούν τα $a, b, c \in \mathbb{C}$ ώστε ο πίνακας να είναι αυτοπροσαρτημένος.

Βρίσκουμε ότι $A^* = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 1-i & 2 & c \\ -i & -2i & 3 \end{pmatrix}$

Παράδειγμα 2: Ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 1+i & i \\ a & 2 & 2i \\ b & c & 3 \end{pmatrix}$ να βρεθούν τα $a, b, c \in \mathbb{C}$ ώστε ο πίνακας να είναι αυτοπροσαρτημένος.

Βρίσκουμε ότι $A^* = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 1-i & 2 & c \\ -i & -2i & 3 \end{pmatrix}$ Για να είναι ο A αυτοπροσαρτημένος πρέπει $A = A^*$ άρα

$a = 1-i, b = -i, c = -2i$

Παράδειγμα 2: Ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 1+i & i \\ a & 2 & 2i \\ b & c & 3 \end{pmatrix}$ να βρεθούν τα $a, b, c \in \mathbb{C}$ ώστε ο πίνακας να είναι αυτοπροσαρτημένος.

Βρίσκουμε ότι $A^* = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 1-i & 2 & c \\ -i & -2i & 3 \end{pmatrix}$ Για να είναι ο A αυτοπροσαρτημένος πρέπει $A = A^*$ άρα

$a = 1 - i, b = -i, c = -2i$

Παρατηρούμε ότι ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} i & 3i \\ a & 2 \end{pmatrix}$ δεν είναι αυτοπροσαρτημένος για καμία τιμή του $a \in \mathbb{C}$.

Παρατηρούμε λοιπόν ότι αν $A \in M_n(\mathbb{R})$ τότε $A^* = A$ και συνεπώς τα στοιχεία της διαγωνίου του A είναι πραγματικοί

Παρατηρούμε λοιπόν ότι αν $A \in M_n(\mathbb{R})$ τότε $A^* = A$ και συνεπώς τα στοιχεία της διαγωνίου του A είναι πραγματικοί

Παρατηρούμε ακόμα ότι παρότι ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ i & 0 \end{pmatrix}$

είναι ισομετρία, δεν είναι αυτοπροσαρτημένος.

Έστω ότι $\phi^* = \phi$ και έστω λ ιδιοτιμή της ϕ, άρα υπάρχει $v \neq O, \phi(v) = \lambda v$. Τότε έχουμε

$$< \phi(v), v > = < v, \phi^*(v) > = < v, \phi(v) > \Rightarrow$$
$$< \lambda v, v > = < v, \lambda v > \Rightarrow$$
$$\lambda < v, v > = \overline{\lambda} < v, v > .$$

Αφού $v \neq O$ τότε $\lambda = \overline{\lambda}$.

Έστω ότι $\phi^* = \phi$ και έστω λ ιδιοτιμή της ϕ, άρα υπάρχει $v \neq O, \phi(v) = \lambda v$. Τότε έχουμε

$$
\begin{aligned}
&< \phi(v), v > =< v, \phi^*(v) >=< v, \phi(v) >\Rightarrow \\
&< \lambda v, v > =< v, \lambda v >\Rightarrow \\
&\lambda < v, v > = \overline{\lambda} < v, v > .
\end{aligned}
$$

Αφού $v \neq O$ τότε $\lambda = \overline{\lambda}$.
Άρα, όταν $\phi^* = \phi$ και λ ιδιοτιμη της ϕ τότε $\lambda \in \mathbb{R}$

Παράδειγμα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$ Άρα

$$P_A(x) = det(A - \lambda I) = (1-x)(2-x) - 1 = x^2 - 3x + 1$$

Παράδειγμα

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$ Άρα

$P_A(x) = det(A - \lambda I) = (1-x)(2-x) - 1 = x^2 - 3x + 1$

Ρίζες $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Παράδειγμα

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$ Άρα

$P_A(x) = det(A - \lambda I) = (1-x)(2-x) - 1 = x^2 - 3x + 1$

Ρίζες $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Ιδιοχώρος

$V_1, A - \frac{3+\sqrt{5}}{2} I = \begin{pmatrix} \frac{-1-\sqrt{5}}{2} & -1 \\ -1 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{5}-1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ και

βρίσκουμε τον ιδιοχώρο V_1 της ιδιοτιμής $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$. Όμοια βρίσκει κανείς τον ιδιοχώρο V_2 της ιδιοτιμής $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ και να παρατηρήσει ότι $V^2 = V_1^{\perp}$

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Dr. Φωτιάδης Ανέστης

Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2013-14

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης