ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

Χαραλάμπους Χαρά

Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2013

Αριστοτέλειο
Πανεπιστήμιο
Θεσσαλονίκης

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

Χαραλάμπους Χαρά

Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2013

Αριστοτέλειο
Πανεπιστήμιο
Θεσσαλονίκης

Σύνοψη

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε τετραγωνικές μορφές.

Ασκήσεις

Θεωρούμε την εξίσωση $x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 - 5 = 0$.

Ασκήσεις

Θεωρούμε την εξίσωση $x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 - 5 = 0$.
Σε αυτήν αντιστοιχεί ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, A = A^T, X^T AX = 5I_1.$$

Ασκήσεις

Θεωρούμε την εξίσωση $x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 - 5 = 0$.
Σε αυτήν αντιστοιχεί ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, A = A^T, X^T A X = 5I_1.$$

Θεωρούμε τον πίνακα των ιδιοδυανισμάτων

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1} = P^T$$

Τότε γνωρίζουμε ότι $P^T A P = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = D$

Χαραλάμπους Χαρά

Ενότητα 10. τετραγωνικές μορφές

Ασκήσεις

Γενική Περίπτωση

Άσκηση

Ασκήσεις

Θεωρούμε την εξίσωση $x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 - 5 = 0$.
Σε αυτήν αντιστοιχεί ο πίνακας
$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, A = A^T, X^T A X = 5I_1$.
Θεωρούμε τον πίνακα των ιδιοδυανισμάτων
$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1} = P^T$

Τότε γνωρίζουμε ότι $P^T A P = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = D$

Νέες συντεταγμένες $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = P^T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Τότε
$Z^T D Z = 5$, άρα $-z_1^2 + 3z_2^2 = 5$ υπερβολή,
όπου $z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x_1 + x_2), z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2)$
Παρατηρούμε ότι $z_1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2, z_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -x_2$

Θεωρούμε την εξίσωση $xy = 1$. Ο πίνακας που αντιστοιχεί στην εξίσωση είναι ο $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

Θεωρούμε την εξίσωση $xy = 1$. Ο πίνακας που αντιστοιχεί στην εξίσωση είναι ο $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι $P_A(x) = (x - \frac{1}{2})(x + \frac{1}{2})$, ιδιοτιμές $\lambda_1 = \frac{1}{2}, \lambda_2 = -\frac{1}{2}$

Θεωρούμε την εξίσωση $xy = 1$. Ο πίνακας που αντιστοιχεί στην εξίσωση είναι ο $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι $P_A(x) = (x - \frac{1}{2})(x + \frac{1}{2})$, ιδιοτιμές $\lambda_1 = \frac{1}{2}, \lambda_2 = -\frac{1}{2}$

Βρίσκουμε ότι $V_{\lambda_1} = S(\{(1,1)\}), V_{\lambda_2} = S(\{(-1,1)\})$

Θεωρούμε την εξίσωση $xy = 1$. Ο πίνακας που αντιστοιχεί στην εξίσωση είναι ο $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι $P_A(x) = (x - \frac{1}{2})(x + \frac{1}{2})$, ιδιοτιμές $\lambda_1 = \frac{1}{2}, \lambda_2 = -\frac{1}{2}$

Βρίσκουμε ότι $V_{\lambda_1} = S(\{(1,1)\}), V_{\lambda_2} = S(\{(-1,1)\})$

Θεωρούμε τον πίνακα

$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, P^T = P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Θεωρούμε την εξίσωση $xy = 1$. Ο πίνακας που αντιστοιχεί στην εξίσωση είναι ο $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι $P_A(x) = (x - \frac{1}{2})(x + \frac{1}{2})$, ιδιοτιμές $\lambda_1 = \frac{1}{2}, \lambda_2 = -\frac{1}{2}$

Βρίσκουμε ότι $V_{\lambda_1} = S(\{(1,1)\}), V_{\lambda_2} = S(\{(-1,1)\})$

Θεωρούμε τον πίνακα

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, P^T = P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Νέες συντεταγμένες $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = P^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Έχουμε ότι $P^T A P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Έχουμε ότι $P^T A P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Με την αλλαγή συντεταγμένων πέρνουμε την εξίσωση $Z^T D Z = 1$, δηλαδή

$$\frac{1}{2} z_1^2 - \frac{1}{2} z_2^2 = 1$$

υπερβολή, όπου $z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y), z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x+y)$

Παρατηρούμε ότι $z_1 = 0 \Leftrightarrow x = -y, z_2 = 0 \Leftrightarrow x = y$

Γενική Περίπτωση

Θεωρούμε την εξίσωση $ax^2 + bxy + cy^2 = d$.
Ο πίνακας που αντιστοιχεί στην εξίσωση είναι ο
$A = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}, A = A^T$

Γενική Περίπτωση

Θεωρούμε την εξίσωση $ax^2 + bxy + cy^2 = d$.
Ο πίνακας που αντιστοιχεί στην εξίσωση είναι ο
$A = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}, A = A^T$
Έστω λ_1, λ_2 οι ιδιοτιμές του A και P ο ορθομοναδιαίος πίνακας ιδιοδιανύσμάτων, έτσι ώστε $P^T AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

Γενική Περίπτωση

Θεωρούμε την εξίσωση $ax^2 + bxy + cy^2 = d$.
Ο πίνακας που αντιστοιχεί στην εξίσωση είναι ο
$A = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}, A = A^T$
Έστω λ_1, λ_2 οι ιδιοτιμές του A και P ο ορθομοναδιαίος πίνακας ιδιοδιανύσματων, έτσι ώστε $P^T AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$
Τότε με την αλλαγή συντεταγμένων $Z = P^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
καταλήγουμε στην εξίσωση $\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 = d$

Γενική Περίπτωση

Θεωρούμε την εξίσωση $ax^2 + bxy + cy^2 = d$.
Ο πίνακας που αντιστοιχεί στην εξίσωση είναι ο
$A = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}, A = A^T$
Έστω λ_1, λ_2 οι ιδιοτιμές του A και P ο ορθομοναδιαίος πίνακας ιδιοδιανυσμάτων, έτσι ώστε $P^TAP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$
Τότε με την αλλαγή συντεταγμένων $Z = P^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
καταλήγουμε στην εξίσωση $\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 = d$
Αν το σύστημα έχει λύση και λ_1, λ_2 έχουν το ίδιο πρόσημο τότε έχουμε έλλειψη αν λ_1, λ_2 έχουν αντίθετο πρόσημο τότε έχουμε υπερβολή.

Άσκηση

Θεωρούμε $\Phi : V \Rightarrow V$ γραμμική συνάρτηση, $\Phi + \Phi^* V \to V$ να δειχθεί ότι αυτοπροσαρτημένη, δηλαδή ότι $(\Phi + \Phi^*)^* = \Phi + \Phi^*$

Άσκηση

Θεωρούμε $\Phi : V \Rightarrow V$ γραμμική συνάρτηση, $\Phi + \Phi^* V \to V$ να δειχθεί ότι αυτοπροσαρτημένη, δηλαδή ότι
$(\Phi + \Phi^*)^* = \Phi + \Phi^*$
Αρκεί να δείξουμε ότι ισχύει η ισότητα για τους αντίστοιχους πίνακες. Έστω A ο πίνακας της Φ, άρα ο πίνακας της $A + A^*$ είναι ο $\Phi + \Phi^*$.

Άσκηση

Θεωρούμε $\Phi : V \Rightarrow V$ γραμμική συνάρτηση, $\Phi + \Phi^* V \to V$ να δειχθεί ότι αυτοπροσαρτημένη, δηλαδή ότι $(\Phi + \Phi^*)^* = \Phi + \Phi^*$

Αρκεί να δείξουμε ότι ισχύει η ισότητα για τους αντίστοιχους πίνακες. Έστω A ο πίνακας της Φ, άρα ο πίνακας της $A + A^*$ είναι ο $\Phi + \Phi^*$.

Αρκεί να δειχθέι ότι $(A + A^*)^* = A + A^*$

Άσκηση

Θεωρούμε $\Phi : V \Rightarrow V$ γραμμική συνάρτηση, $\Phi + \Phi^* V \to V$ να δειχθεί ότι αυτοπροσαρτημένη, δηλαδή ότι
$(\Phi + \Phi^*)^* = \Phi + \Phi^*$
Αρκεί να δείξουμε ότι ισχύει η ισότητα για τους αντίστοιχους πίνακες. Έστω A ο πίνακας της Φ, άρα ο πίνακας της $A + A^*$ είναι ο $\Phi + \Phi^*$.
Αρκεί να δειχθέι ότι $(A + A^*)^* = A + A^*$
Έχουμε

$$\begin{aligned}\overline{(A + A^*)^T} &= \overline{A^T + (A^*)^T} = \overline{A^T} + \overline{(A^*)^T} \\ &= A^* + (A^*)^* = A^* + A = A + A^*\end{aligned}$$

Άρα $(\Phi + \Phi^*)^* = \Phi + \Phi^*$

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Dr. Φωτιάδης Ανέστης

Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2013-14

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης