ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

Χαραλάμπους Χαρά

Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2013

Αριστοτέλειο
Πανεπιστήμιο
Θεσσαλονίκης

Χρηματοδότηση

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα. Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Σύνοψη

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε: Κανονικοί πίνακες, παραδείγματα, αντίστροφο φασματικού θεωρήματος, Αν $< v, f(w) >=< v, g(w) >$ για κάθε v, w τότε $f = g$, αντίστροφο φασματικού θεωρήματος.

Κανονικοί Πίνακες

Θυμίζουμε ότι A κανονικός αν $A^*A = AA^*$.

Κανονικοί Πίνακες

Θυμίζουμε ότι A κανονικός αν $A^*A = AA^*$.
Είδαμε ότι
1. Αν $A = A^*$ τότε A κανονικός

Κανονικοί Πίνακες

Θυμίζουμε ότι A κανονικός αν $A^*A = AA^*$.
Είδαμε ότι

1. Αν $A = A^*$ τότε A κανονικός
2. Αν $A^{-1} = A^*$ τότε A κανονικός

Κανονικοί Πίνακες

Θυμίζουμε ότι A κανονικός αν $A^*A = AA^*$.
Είδαμε ότι

1. Αν $A = A^*$ τότε A κανονικός
2. Αν $A^{-1} = A^*$ τότε A κανονικός
3. Αν A κανονικός και U ορθομοναδιαίοσ$(U^{-1} = U^*)$ τότε $U^{-1}AU$ κανονικός

Παράδειγμα

Θεωρούμε τον πίνακα $\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1+i & 1 \end{pmatrix}$ και παρατηρούμε ότι $A \neq A^*, AA^* = A^*A$, δηλαδή ο πίνακας A είναι κανονικός και δεν είναι αυτοπροσαρτημένος.

Παράδειγμα

Θεωρούμε τον πίνακα $\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1+i & 1 \end{pmatrix}$ και παρατηρούμε ότι $A \neq A^*, AA^* = A^*A$, δηλαδή ο πίνακας A είναι κανονικός και δεν είναι αυτοπροσαρτημένος.

Βρίσκουμε $P_A(x) = (x^2 - 2x + 1 - 2i) \in \mathbb{C}[x]$ και άρα οι ιδιοτιμές του A είναι $1 \pm \sqrt{2}\sqrt{i}$. Γνωρίζουμε ότι $\sqrt{i} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i), -\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$, άρα καταλήγουμε ότι έχουμε τις ιδιοτιμές $x_1 = 2 + i, x_2 = -i$

Παράδειγμα

Θεωρούμε τον πίνακα $\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1+i & 1 \end{pmatrix}$ και παρατηρούμε ότι $A \neq A^*$, $AA^* = A^*A$, δηλαδή ο πίνακας A είναι κανονικός και δεν είναι αυτοπροσαρτημένος.
Βρίσκουμε $P_A(x) = (x^2 - 2x + 1 - 2i) \in \mathbb{C}[x]$ και άρα οι ιδιοτιμές του A είναι $1 \pm \sqrt{2}\sqrt{i}$. Γνωρίζουμε ότι $\sqrt{i} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i), -\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$, άρα καταλήγουμε ότι έχουμε τις ιδιοτιμές $x_1 = 2+i, x_2 = -i$
Βρίσκουμε τα ιδιοδιανύσματα $v_1 = (1,1)$ και $v_2 = (1,-1)$.
Θεωρούμε τον ορθομοναδιαίο πίνακα
$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1} = P^* = P^T$. Γνωρίζουμε ότι
$P^T A P = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & 2+i \end{pmatrix}$

Υπενθύμιση

λ ιδιοτιμή του $A \Leftrightarrow$

Υπενθύμιση

λ ιδιοτιμή του $A \Leftrightarrow$
$\exists v \neq O : Av = \lambda v \Leftrightarrow$

Υπενθύμιση

λ ιδιοτιμή του $A \Leftrightarrow$
$\exists v \neq O : Av = \lambda v \Leftrightarrow$
$P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow$

Υπενθύμιση

λ ιδιοτιμή του $A \Leftrightarrow$

$\exists v \neq O : Av = \lambda v \Leftrightarrow$

$P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow$

$A - \lambda I$ δεν είναι αντιστρέψιμος $\Leftrightarrow$

Υπενθύμιση

λ ιδιοτιμή του $A \Leftrightarrow$

$\exists v \neq O : Av = \lambda v \Leftrightarrow$

$P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow$

$A - \lambda I$ δεν είναι αντιστρέψιμος $\Leftrightarrow$

$det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow$

Υπενθύμιση

λ ιδιοτιμή του $A \Leftrightarrow$
$\exists v \neq O : Av = \lambda v \Leftrightarrow$
$P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow$
$A - \lambda I$ δεν είναι αντιστρέψιμος $\Leftrightarrow$
$det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow$
$rank(A - \lambda I) < n$

Υπενθύμιση

λ ιδιοτιμή του $A \Leftrightarrow$
$\exists v \neq O : Av = \lambda v \Leftrightarrow$
$P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow$
$A - \lambda I$ δεν είναι αντιστρέψιμος $\Leftrightarrow$
$det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow$
$rank(A - \lambda I) < n$

Αν $|z| = 1$ τότε $z = e^{i\theta}$ και συνεπώς $z^2 = e^{i(2\theta)}$. Άρα $z^2 = i \Rightarrow 2\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

Συμπεράσματα

Αν A ορθογώνια διαγωνοποιήσιμος ($\exists P, P^{-1} = P^*$ και $P^*AP =$ διαγώνιος) τότε ο A είναι κανονικός και αντίστροφα.

Συμπεράσματα

Αν A ορθογώνια διαγωνοποιήσιμος ($\exists P, P^{-1} = P^*$ και $P^*AP =$ διαγώνιος) τότε ο A είναι κανονικός και αντίστροφα.

Βασική ιδέα της απόδειξης: Όλοι οι πίνακες είναι τριγωνοποιήσιμοι.

Συμπεράσματα

Αν A ορθογώνια διαγωνοποιήσιμος ($\exists P, P^{-1} = P^*$ και $P^*AP =$ διαγώνιος) τότε ο A είναι κανονικός και αντίστροφα.
Βασική ιδέα της απόδειξης: Όλοι οι πίνακες είναι τριγωνοποιήσιμοι.

Φασματικό Θεώρημα(μορφή Α):Αν $A = A^*$ τότε ο A είναι ορθογώνια διαγωνοποιήσιμος και όλες οι ιδιοτιμές του A είναι πραγματικοί αριθμοί.

Συμπεράσματα

Αν A ορθογώνια διαγωνοποιήσιμος ($\exists P, P^{-1} = P^*$ και $P^*AP =$ διαγώνιος) τότε ο A είναι κανονικός και αντίστροφα.
Βασική ιδέα της απόδειξης: Όλοι οι πίνακες είναι τριγωνοποιήσιμοι.

Φασματικό Θεώρημα(μορφή Α):Αν $A = A^*$ τότε ο A είναι ορθογώνια διαγωνοποιήσιμος και όλες οι ιδιοτιμές του A είναι πραγματικοί αριθμοί.
Επίσης είδαμε ότι αν
1.$A \in M_n(\mathbb{R})$,
2.A ορθογώνια διαγωνοποιήσιμος,
3. οι ιδιοτιμές του A είναι πραγματικοί αριθμοί τότε
$A = A^T = A^*$

Ερώτημα

Έστω ότι
1.$A \in M_n(\mathbb{C})$,
2.A ορθογώνια διαγωνοποιήσιμος,
3. οι ιδιοτιμές του A είναι πραγματικοί αριθμοί
τότε ισχύει ότι $A = A^T = A^*$;

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Dr. Φωτιάδης Ανέστης

Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2013-14

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης