ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

Χαραλάμπους Χαρά

Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2013

Αριστοτέλειο
Πανεπιστήμιο
Θεσσαλονίκης

Χρηματοδότηση

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα. Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Σύνοψη

Σε αυτή την ενότητα μιλάμε για Γραμμικά συστήματα: μέθοδος εύρεσης λύσεων, Γραφή συνόλου λύσεων, μη συμβατά συστήματα $Null(A)$, $Ker(f)$ και $Null(A)$, $Im(f)$ και επίλυση γραμμικών συστημάτων, Μέθοδος του *Cramer*, σημεία σε μία καμπύλη.

Γραμμικά Συστήματα

$$AX = B$$

Γραμμικά Συστήματα

$$AX = B$$

Έχουμε ένα σύστημα με m εξισώσεις και n αγνώστους.
A ο $m \times n$ πίνακας των συντελεστών, B ο $n \times 1$ πίνακας των σταθερών, X ο $m \times 1$ πίνακας των αγνώστων.

Γραμμικά Συστήματα

$$AX = B$$

Έχουμε ένα σύστημα με m εξισώσεις και n αγνώστους. A ο $m \times n$ πίνακας των συντελεστών, B ο $n \times 1$ πίνακας των σταθερών, X ο $m \times 1$ πίνακας των αγνώστων. Θεωρούμε τον επαυξημένο πίνακα $[A|B]$ και κάνουμε γραμμοπράξεις ώσπου να καταλήξουμε στον πίνακα $[C, D]$, όπου ο C είναι σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών.

Γραμμικά Συστήματα

$$AX = B$$

Έχουμε ένα σύστημα με m εξισώσεις και n αγνώστους.
A ο $m \times n$ πίνακας των συντελεστών, B ο $n \times 1$ πίνακας των σταθερών, X ο $m \times 1$ πίνακας των αγνώστων.
Θεωρούμε τον επαυξημένο πίνακα $[A|B]$ και κάνουμε γραμμοπράξεις ώσπου να καταλήξουμε στον πίνακα $[C, D]$, όπου ο C είναι σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών.
Στον πίνακα C αντιστοιχεί ένα νέο ισοδύναμο γραμμικό σύστημα. Είναι συμβατό;

Γραμμικά Συστήματα

$$AX = B$$

Έχουμε ένα σύστημα με m εξισώσεις και n αγνώστους.
A ο $m \times n$ πίνακας των συντελεστών, B ο $n \times 1$ πίνακας των σταθερών, X ο $m \times 1$ πίνακας των αγνώστων.
Θεωρούμε τον επαυξημένο πίνακα $[A|B]$ και κάνουμε γραμμοπράξεις ώσπου να καταλήξουμε στον πίνακα $[C, D]$, όπου ο C είναι σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών.
Στον πίνακα C αντιστοιχεί ένα νέο ισοδύναμο γραμμικό σύστημα. Είναι συμβατό;
Αν έχω μηδενική γραμμή στον C τότε πρέπει και η αντίστοιχη γραμμή στον D να είναι επίσης μηδενική, διαφορετικά είναι μη συμβατό.

Αν το σύστημα είναι συμβατό τότε λύνουμε το σύστημα

$$CX = D$$

ως προς τις μεταβλητές που αντιστοιχούν στις καθοδηγητικές μονάδες.

Αν το σύστημα είναι συμβατό τότε λύνουμε το σύστημα

$$CX = D$$

ως προς τις μεταβλητές που αντιστοιχούν στις καθοδηγητικές μονάδες.
Περιγράφουμε το σύνολο των λύσεων:

$$\{(x_1, \ldots, x_n) : \text{ παράμετροι } \}$$

όπου παράμετροι=μεταβλητές χωρίς καθοδηγητική μονάδα.

Παραδείγματα

Να λυθούν τα παρακάτω συστήματα:

i)
$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ 2x & + & 3y & & & = & 0 \end{array}$$

Παραδείγματα

Να λυθούν τα παρακάτω συστήματα:

i)
$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ 2x & + & 3y & & & = & 0 \end{array}$$

ii)
$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & & & = & 0 \end{array}$$

Παραδείγματα

Να λυθούν τα παρακάτω συστήματα:

i)
$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ 2x & + & 3y & & & = & 0 \end{array}$$

ii)
$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & & & = & 0 \end{array}$$

ii)
$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & & & = & 3 \end{array}$$

Λύση

Ορίζουμε τον επαυξημένο πίνακα

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

Λύση

Ορίζουμε τον επαυξημένο πίνακα

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 & | & 1 & | & 1 \\ 1 & 2 & -1 & | & 0 & | & 2 & | & 2 \\ 0 & 1 & 4 & | & 0 & | & 0 & | & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\Gamma_3'=\Gamma_3-2\Gamma 1]{\Gamma_2'=\Gamma_2-\Gamma 1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 & | & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & -2 & | & 0 & | & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & -2 & | & 0 & | & -2 & | & 1 \end{pmatrix}$$

Λύση

Ορίζουμε τον επαυξημένο πίνακα

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\Gamma_3'=\Gamma_3-2\Gamma 1]{\Gamma_2'=\Gamma_2-\Gamma 1} \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\Gamma_3'=\Gamma_3-\Gamma 2} \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

Το δεύτερο σύστημα δεν είναι συμβατό, δηλ. δεν έχει λύση.

Το δεύτερο σύστημα δεν είναι συμβατό, δηλ. δεν έχει λύση.

$$\xrightarrow{\Gamma_1' = \Gamma_1 - \Gamma 2} \left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

1. Ομογενές σύστημα:
$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & & + & 3x_3 & = & 0 \\ & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 0 \end{array}$$

1. Ομογενές σύστημα:
$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & & + & 3x_3 & = & 0 \\ & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 0 \end{array}$$

Άρα

$$x_1 = -3x_3$$
$$x_2 = 2x_3$$

1. Ομογενές σύστημα:
$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & & + & 3x_3 & = & 0 \\ & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 0 \end{array}$$

Άρα

$$x_1 = -3x_3$$
$$x_2 = 2x_3$$

Λύσεις του συστήματος

$$\{(-3x_3, 2x_3, x_3) : x_3 \in \mathbb{R}\} = \{x_3(-3, 2, 1) : x_3 \in \mathbb{R}\}$$

1. Ομογενές σύστημα: $\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & & + & 3x_3 & = & 0 \\ & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 0 \end{array}$

Άρα

$$x_1 = -3x_3$$
$$x_2 = 2x_3$$

Λύσεις του συστήματος

$$\{(-3x_3, 2x_3, x_3) : x_3 \in \mathbb{R}\} = \{x_3(-3, 2, 1) : x_3 \in \mathbb{R}\}$$

Διανυσματικός χώρος, ευθεία που περνάει από το (0,0,0).

2. Μη ομογενές σύστημα:

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & & + & 3x_3 & = & 0 \\ & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 1 \end{array}$$

2. Μη ομογενές σύστημα:

$$\begin{array}{cccccccc} x_1 & + & & + & 3x_3 & = & 0 \\ & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 1 \end{array}$$

Άρα

$$x_1 = -3x_3$$
$$x_2 = 1 + 2x_3$$

2. Μη ομογενές σύστημα: $\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & & + & 3x_3 & = & 0 \\ & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 1 \end{array}$

Άρα

$$\begin{aligned} x_1 &= -3x_3 \\ x_2 &= 1 + 2x_3 \end{aligned}$$

Λύσεις του συστήματος

$$\{(-3x_3, 1+2x_3, x_3) : x_3 \in \mathbb{R}\} = \{x_3(-3, 2, 1)+(0, 1, 0) : x_3 \in \mathbb{R}\}$$

Παρατήρηση 1

Στήλη χωρίς καθοδηγητική μονάδα $\Rightarrow$ παράμετροι, άπειρες λύσεις

Παρατήρηση 1

Στήλη χωρίς καθοδηγητική μονάδα $\Rightarrow$ παράμετροι, άπειρες λύσεις

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Παρατήρηση 1

Στήλη χωρίς καθοδηγητική μονάδα $\Rightarrow$ παράμετροι, άπειρες λύσεις

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Λύσεις του συστήματος

$$\{(x_1, -x_3 - 3x_5, x_3, -2x_5, x_5) : x_1, x_3, x_5 \in \mathbb{R}\} = \{x_1(1,0,0,0,0) + x_3(0,-1,1,0,0) + x_5(0,-3,0,-2,1) : x_1, x_3, x_5 \in \mathbb{R}\}$$

Παρατήρηση 1

Στήλη χωρίς καθοδηγητική μονάδα $\Rightarrow$ παράμετροι, άπειρες λύσεις

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Λύσεις του συστήματος

$$\{(x_1, -x_3 - 3x_5, x_3, -2x_5, x_5) : x_1, x_3, x_5 \in \mathbb{R}\} =$$
$$\{x_1(1,0,0,0,0) + x_3(0,-1,1,0,0) + x_5(0,-3,0,-2,1) :$$
$$x_1, x_3, x_5 \in \mathbb{R}\}$$

Υπόχωρος διάστασης 3

Πρόταση

Αριθμός παραμέτρων = διάσταση διανυσματικού χώρου των λύσεων
$= n - rank(A)$, όπου A πίνακας $n \times n$.

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Dr. Φωτιάδης Ανέστης

Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2013-14

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης