ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

Χαραλάμπους Χαρά

Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2013

Αριστοτέλειο
Πανεπιστήμιο
Θεσσαλονίκης

Χαραλάμπους Χαρά

Χρηματοδότηση

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα. Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Σύνοψη

Σε αυτή την ενότητα μιλάμε για Γραμμικά συστήματα: μέθοδος εύρεσης λύσεων, Γραφή συνόλου λύσεων, μη συμβατά συστήματα $Null(A)$, $Ker(f)$ και $Null(A)$, $Im(f)$ και επίλυση γραμμικών συστημάτων, Μέθοδος του *Cramer*, σημεία σε μία καμπύλη.

Γραμμικά Συστήματα

$$AX = 0$$

είναι πάντα συμβατό αφού $x_1 = \ldots = x_n = 0$ είναι μια λύση του.

Γραμμικά Συστήματα

$$AX = 0$$

είναι πάντα συμβατό αφού $x_1 = \ldots = x_n = 0$ είναι μια λύση του.

Οι λύσεις του συστήματος αποτελούν διανυσματικό χώρο.

Γραμμικές απεικονίσεις

Στον πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

Γραμμικές απεικονίσεις

Στον πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$
Αντιστοιχεί μια γραμμική απεικόνιση f με πεδίο ορισμού τον $\mathbb{R}^3$(αριθμός στηλών) και σύνολο τιμών τον $\mathbb{R}^3$(αριθμός γραμμών),

Γραμμικές απεικονίσεις

Στον πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$
Αντιστοιχεί μια γραμμική απεικόνιση f με πεδίο ορισμού τον $\mathbb{R}^3$(αριθμός στηλών) και σύνολο τιμών τον $\mathbb{R}^3$(αριθμός γραμμών),συγκεκριμένα

$$f(x,y,z) = (x+y+z, x+2y-z, 2x+3y)$$

Στον πίνακα $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Στον πίνακα $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
Αντιστοιχεί μια γραμμική απεικόνιση f με πεδίο ορισμού τον $\mathbb{R}^5$(αριθμός στηλών) και σύνολο τιμών τον $\mathbb{R}^2$(αριθμός γραμμών),

Στον πίνακα $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
Αντιστοιχεί μια γραμμική απεικόνιση f με πεδίο ορισμού τον $\mathbb{R}^5$(αριθμός στηλών) και σύνολο τιμών τον $\mathbb{R}^2$(αριθμός γραμμών), συγκεκριμένα

$$f(a, b, c, d, e) = (b + c + 3e, d + 2e)$$

Στον πίνακα $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Στον πίνακα $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$Αντιστοιχεί μια γραμμική απεικόνιση f με πεδίο ορισμού τον $\mathbb{R}^3$(αριθμός στηλών) και σύνολο τιμών τον $\mathbb{R}^3$(αριθμός γραμμών), Στον πίνακα $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$Αντιστοιχεί μια γραμμική απεικόνιση f με πεδίο ορισμού τον $\mathbb{R}^3$(αριθμός στηλών) και σύνολο τιμών τον $\mathbb{R}^3$(αριθμός γραμμών), συγκεκριμένα

$$f(a, b, c) = (0, 0, 0)$$

Στον πίνακα $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Αντιστοιχεί μια γραμμική απεικόνιση f με πεδίο ορισμού τον $\mathbb{R}^3$(αριθμός στηλών) και σύνολο τιμών τον $\mathbb{R}^3$(αριθμός γραμμών), συγκεκριμένα

$$f(a, b, c) = (0, 0, 0)$$

Σύνολο λύσεων συστήματος $AX = 0$ είναι το σύνολο

$$\{(x_1, x_2, x_3) : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^3$$

Στον πίνακα $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Αντιστοιχεί μια γραμμική απεικόνιση f με πεδίο ορισμού τον $\mathbb{R}^3$(αριθμός στηλών) και σύνολο τιμών τον $\mathbb{R}^3$(αριθμός γραμμών), συγκεκριμένα

$$f(a, b, c) = (0, 0, 0)$$

Σύνολο λύσεων συστήματος $AX = 0$ είναι το σύνολο

$$\{(x_1, x_2, x_3) : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^3$$

Αυτό είναι και το σύνολο των (x, y, z) ώστε $f(x, y, z) = 0$.

Γενικό συμπέρασμα

Στον πίνακα A αντιστοιχεί μια γραμμική απεικόνιση f_A

Γενικό συμπέρασμα

Στον πίνακα A αντιστοιχεί μια γραμμική απεικόνιση f_A
Ο μηδενοχώρος $null(A)$ του πίνακα A ισούται με τον πυρήνα $ker(f_A)$ της γραμμικής απεικόνισης f_A

Χαραλάμπους Χαρά

Οι λύσεις του συστήματος $AQ = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ισούται με όλα τα (x, y, z) τέτοια ώστε $f(x, y, z) = (1, 2, 3)$

Παράδειγμα

Έστω $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$,
$f(x, y, z, w) = (x + y, y + z, z + w, w + x, x + z)$.

Παράδειγμα

Έστω $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$,
$f(x, y, z, w) = (x + y, y + z, z + w, w + x, x + z)$.

- Βρείτε τον $Ker(f)$
- Είναι $(1, 1, 1, 1, 1) \in Im(f)$;

Ο πίνακας της f είναι ο $A_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Ο πίνακας της f είναι ο $A_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Λύνουμε τα παρακάτω συστήματα

- $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Λύση

Ορίζουμε τον επαυξημένο πίνακα

$$\left(\begin{array}{cccc|c|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Λύση

Ορίζουμε τον επαυξημένο πίνακα

$$\left(\begin{array}{cccc|c|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\Gamma_5'=\Gamma_5-\Gamma 1]{\Gamma_4'=\Gamma_4-\Gamma 1} \left(\begin{array}{cccc|c|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\Gamma_5' = \Gamma_5 + \Gamma 2]{\Gamma_4' = \Gamma_4 + \Gamma 2} \left(\begin{array}{cccc|c|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\Gamma_5'=\Gamma_5+\Gamma 2]{\Gamma_4'=\Gamma_4+\Gamma 2} \left(\begin{array}{cccc|c|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\Gamma_5'=\Gamma_5-2\Gamma 3]{\Gamma_4'=\Gamma_4-\Gamma 3} \left(\begin{array}{cccc|c|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

- $(1, 1, 1, 1, 1) \in Im(f)$
- $Ker(f) = \{(0, 0, 0, 0)\}$

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Dr. Φωτιάδης Ανέστης

Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2013-14

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης