ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

Χαραλάμπους Χαρά

Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2013

Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Χρηματοδότηση

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα. Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Σύνοψη

1 Ενότητα 3. Διαγωνιοποίηση
- Διαγωνιοποίηση πινάκων
- Παράδειγμα

Στην ενότητα αυτή μελετούνται Ιδιοχώροι, Αλγεβρική και Γεωμετρική Πολλαπλότητα, Ανεξαρτησία Ιδιοδιανυσμάτων για διαφορετικές ιδιοτιμές, Διαγωνιοποίηση, Εφαρμογές: πρόβλημα κυνηγού+λείας,

Διαγωνιοποίηση πινάκων

Αν A είναι $n \times n$, και $V_1, \dots, V_n$ γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιάνυσμα με ιδιοτιμές $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Διαγωνιοποίηση πινάκων

Αν A είναι $n \times n$, και $V_1, \ldots, V_n$ γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιάνυσμα με ιδιοτιμές $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Έστω $P = [V_1, \ldots, V_n]$ πίνακας με στήλες τα $V_1, \ldots, V_n$.

Διαγωνιοποίηση πινάκων

Αν A είναι $n \times n$, και $V_1, \ldots, V_n$ γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιάνυσμα με ιδιοτιμές $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Έστω $P = [V_1, \ldots, V_n]$ πίνακας με στήλες τα $V_1, \ldots, V_n$. Παρατηρούμε ότι ο πίνακας P είναι αντιστρέψιμος.
Τότε $P^{-1}AP = [\lambda_i \delta_{ij}]$ διαγώνιος πίνακας

Διαγωνιοποίηση πινάκων

Αν A είναι $n \times n$, και $V_1, \ldots, V_n$ γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιάνυσμα με ιδιοτιμές $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Έστω $P = [V_1, \ldots, V_n]$ πίνακας με στήλες τα $V_1, \ldots, V_n$. Παρατηρούμε ότι ο πίνακας P είναι αντιστρέψιμος.

Τότε $P^{-1}AP = [\lambda_i \delta_{ij}]$ διαγώνιος πίνακας

Διαγωνιοποίηση του πίνακα A.

Διαγωνιοποίηση πινάκων

Αν A είναι $n \times n$, και $V_1, \ldots, V_n$ γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιάνυσμα με ιδιοτιμές $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Έστω $P = [V_1, \ldots, V_n]$ πίνακας με στήλες τα $V_1, \ldots, V_n$. Παρατηρούμε ότι ο πίνακας P είναι αντιστρέψιμος.
Τότε $P^{-1}AP = [\lambda_i \delta_{ij}]$ διαγώνιος πίνακας
Διαγωνιοποίηση του πίνακα A.

Αν ο πίνακας A έχει n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, τότε ο πίνακας A διαγωνιοποιείται. Δηλαδή είναι όμοιος με ένα διαγώνιο πίνακα του οποίου οι τιμές είναι οι ιδιοτιμές του A.

Παρατήρηση

Ισχύει και το αντίστροφο (ΓΙΑΤΙ;), δηλαδή αν $Q^{-1}AQ = D$ είναι διαγώνιος πίνακας τότε τα διαγώνια στοιχεία του D είναι ιδιοτιμές του A και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του A είναι οι στήλες του Q^{-1}.

Παρατήρηση

Ισχύει και το αντίστροφο (ΓΙΑΤΙ;), δηλαδή αν $Q^{-1}AQ = D$ είναι διαγώνιος πίνακας τότε τα διαγώνια στοιχεία του D είναι ιδιοτιμές του A και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του A είναι οι στήλες του Q^{-1}.

Ερώτημα: πότε υπάρχουν n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα;

Παράδειγμα

Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

Παράδειγμα

Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

Αφού $det(A) = 0$, το $\lambda = 0$ είναι ιδιοτιμή του A.

Παράδειγμα

Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

Αφού $det(A) = 0$, το $\lambda = 0$ είναι ιδιοτιμή του A.

$P_A(x) = det(A - xI) = x^2 - 3x$. Ιδιοτιμές $\lambda = 0, \lambda = 3$

Παράδειγμα

Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$
Αφού $det(A) = 0$, το $\lambda = 0$ είναι ιδιοτιμή του A.

$P_A(x) = det(A - xI) = x^2 - 3x$. Ιδιοτιμές $\lambda = 0, \lambda = 3$

$V_0(A) = null(A) = \{y(-1,1) : y \in \mathbb{C}\}$, $dim(V_0(A)) = 1$, βάση $\{(-1,1)\}$

Παράδειγμα

Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

Αφού $det(A) = 0$, το $\lambda = 0$ είναι ιδιοτιμή του A.

$P_A(x) = det(A - xI) = x^2 - 3x$. Ιδιοτιμές $\lambda = 0, \lambda = 3$

$V_0(A) = null(A) = \{y(-1,1) : y \in \mathbb{C}\}$, $dim(V_0(A)) = 1$, βάση $\{(-1,1)\}$

$V_3(A) = null(A - 3I) = \{y(\frac{1}{2},1) : y \in \mathbb{C}\}$, $dim(V_0(A)) = 1$, βάση $\{(\frac{1}{2},1)\}$

Παράδειγμα

Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$
Αφού $det(A) = 0$, το $\lambda = 0$ είναι ιδιοτιμή του A.

$P_A(x) = det(A - xI) = x^2 - 3x$. Ιδιοτιμές $\lambda = 0, \lambda = 3$

$V_0(A) = null(A) = \{y(-1,1) : y \in \mathbb{C}\}$, $dim(V_0(A)) = 1$, βάση $\{(-1,1)\}$

$V_3(A) = null(A - 3I) = \{y(\frac{1}{2},1) : y \in \mathbb{C}\}$, $dim(V_0(A)) = 1$, βάση $\{(\frac{1}{2},1)\}$

$P = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ αντιστρέψιμος, με $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

Έστω $Q = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 2 & i \end{pmatrix}$ αντιστρέψιμος με $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in V_3(A)$ και $\begin{pmatrix} -i \\ i \end{pmatrix} \in V_0(A)$

Έστω $Q = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 2 & i \end{pmatrix}$ αντιστρέψιμος με $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in V_3(A)$ και $\begin{pmatrix} -i \\ i \end{pmatrix} \in V_0(A)$

τότε $Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Αν A είναι 5×5, και V_1, V_2 ιδιοδιάνυσμα με ιδιοτιμές $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$.

Αν A είναι 5×5, και V_1, V_2 ιδιοδιάνυσμα με ιδιοτιμές $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$.

Είναι τα V_1, V_2 γραμμικά ανεξάρτητα;

Αν A είναι 5×5, και V_1, V_2 ιδιοδιάνυσμα με ιδιοτιμές $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$.
Είναι τα V_1, V_2 γραμμικά ανεξάρτητα;
Έστω ότι

$$k_1 V_1 + k_2 V_2 = O \tag{1}$$

Αν A είναι 5×5, και V_1, V_2 ιδιοδιάνυσμα με ιδιοτιμές $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$.

Είναι τα V_1, V_2 γραμμικά ανεξάρτητα;

Έστω ότι

$$k_1 V_1 + k_2 V_2 = O \tag{1}$$

Πολλαπλασιάζουμε από τα αριστερά με τον πίνακα A:

Αν A είναι 5×5, και V_1, V_2 ιδιοδιάνυσμα με ιδιοτιμές $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$.
Είναι τα V_1, V_2 γραμμικά ανεξάρτητα;
Έστω ότι

$$k_1 V_1 + k_2 V_2 = O \tag{1}$$

Πολλαπλασιάζουμε από τα αριστερά με τον πίνακα A:

$$k_1 A V_1 + k_2 A V_2 = O \Rightarrow k_1 \lambda_1 V_1 + k_2 \lambda_2 V_2 = O \tag{2}$$

Αν A είναι 5×5, και V_1, V_2 ιδιοδιάνυσμα με ιδιοτιμές $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$.
Είναι τα V_1, V_2 γραμμικά ανεξάρτητα;
Έστω ότι

$$k_1 V_1 + k_2 V_2 = O \tag{1}$$

Πολλαπλασιάζουμε από τα αριστερά με τον πίνακα A:

$$k_1 A V_1 + k_2 A V_2 = O \Rightarrow k_1 \lambda_1 V_1 + k_2 \lambda_2 V_2 = O \tag{2}$$

Από τις παραπάνω σχέσεις (1) και (2) βρίσκουμε $k_1 = k_2 = 0$, αφού $V_1, V_2 \neq O$. Άρα V_1, V_2 γραμμικά ανεξάρτητα

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Dr. Φωτιάδης Ανέστης

Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2013-14

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης