ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

Χαραλάμπους Χαρά

Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2013

Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα. Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Σύνοψη

1 Ενότητα 3. Διαγωνιοποίηση
- Ασκήσεις
- Γενίκευση

Στην ενότητα αυτή μελετούνται Ιδιοχώροι, Αλγεβρική και Γεωμετρική Πολλαπλότητα, Ανεξαρτησία Ιδιοδιανυσμάτων για διαφορετικές ιδιοτιμές, Διαγωνιοποίηση, Εφαρμογές: πρόβλημα κυνηγού+λείας,

Ασκήσεις

Έστω A, B όμοιοι πίνακες, δηλαδή υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P ώστε $B = P^{-1}AP$. Τότε A, B έχουν ίδιες ιδιοτιμές

Ασκήσεις

Έστω A, B όμοιοι πίνακες, δηλαδή υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P ώστε $B = P^{-1}AP$. Τότε A, B έχουν ίδιες ιδιοτιμές

Απόδειξη:

Ασκήσεις

Έστω A, B όμοιοι πίνακες, δηλαδή υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P ώστε $B = P^{-1}AP$. Τότε A, B έχουν ίδιες ιδιοτιμές

Απόδειξη: $P_A(x) = det(A - \lambda I)$. Αν λ ιδιοτιμή του A τότε $det(A - \lambda I) = 0$.

Ασκήσεις

Έστω A, B όμοιοι πίνακες, δηλαδή υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P ώστε $B = P^{-1}AP$. Τότε A, B έχουν ίδιες ιδιοτιμές

Απόδειξη: $P_A(x) = det(A - \lambda I)$. Αν λ ιδιοτιμή του A τότε $det(A - \lambda I) = 0$. Αφού $B = P^{-1}AP$ τότε $det(PBP^{-1} - \lambda I) = 0$.

Ασκήσεις

Έστω A, B όμοιοι πίνακες, δηλαδή υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P ώστε $B = P^{-1}AP$. Τότε A, B έχουν ίδιες ιδιοτιμές

Απόδειξη: $P_A(x) = det(A - \lambda I)$. Αν λ ιδιοτιμή του A τότε $det(A - \lambda I) = 0$. Αφού $B = P^{-1}AP$ τότε $det(PBP^{-1} - \lambda I) = 0$. Άρα $det(PBP^{-1} - \lambda I) = det(PBP^{-1} - \lambda PIP^{-1}) = det(P(B - \lambda I)P^{-1}) = det(P)det(B - \lambda I)det(P^{-1}) = det(B - \lambda I) = 0$,

Ασκήσεις

Έστω A, B όμοιοι πίνακες, δηλαδή υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P ώστε $B = P^{-1}AP$. Τότε A, B έχουν ίδιες ιδιοτιμές

Απόδειξη: $P_A(x) = det(A - \lambda I)$. Αν λ ιδιοτιμή του A τότε $det(A - \lambda I) = 0$. Αφού $B = P^{-1}AP$ τότε $det(PBP^{-1} - \lambda I) = 0$. Άρα $det(PBP^{-1} - \lambda I) = det(PBP^{-1} - \lambda PIP^{-1}) = det(P(B - \lambda I)P^{-1}) = det(P)det(B - \lambda I)det(P^{-1}) = det(B - \lambda I) = 0$, αφού P αντιστρέψιμος πίνακας και $det(P^{-1})det(P) = 0$.

Ασκήσεις

Έστω A, B όμοιοι πίνακες, δηλαδή υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P ώστε $B = P^{-1}AP$. Τότε A, B έχουν ίδιες ιδιοτιμές

Απόδειξη: $P_A(x) = det(A - \lambda I)$. Αν λ ιδιοτιμή του A τότε $det(A - \lambda I) = 0$. Αφού $B = P^{-1}AP$ τότε $det(PBP^{-1} - \lambda I) = 0$. Άρα $det(PBP^{-1} - \lambda I) = det(PBP^{-1} - \lambda PIP^{-1}) = det(P(B - \lambda I)P^{-1}) = det(P)det(B - \lambda I)det(P^{-1}) = det(B - \lambda I) = 0$, αφού P αντιστρέψιμος πίνακας και $det(P^{-1})det(P) = 0$.Συνεπώς λ ιδιοτιμή του B.

Ασκήσεις

Έστω A, B όμοιοι πίνακες, δηλαδή υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P ώστε $B = P^{-1}AP$. Τότε A, B έχουν ίδιες ιδιοτιμές

Απόδειξη: $P_A(x) = det(A - \lambda I)$. Αν λ ιδιοτιμή του A τότε $det(A - \lambda I) = 0$. Αφού $B = P^{-1}AP$ τότε $det(PBP^{-1} - \lambda I) = 0$. Άρα $det(PBP^{-1} - \lambda I) = det(PBP^{-1} - \lambda PIP^{-1}) = det(P(B - \lambda I)P^{-1}) = det(P)det(B - \lambda I)det(P^{-1}) = det(B - \lambda I) = 0$, αφού P αντιστρέψιμος πίνακας και $det(P^{-1})det(P) = 0$.Συνεπώς λ ιδιοτιμή του B. Όμοια μπορούμε να δείξουμε ότι κάθε ιδιοτιμή του B είναι και ιδιοτιμή του A. Άρα οι πίνακες A, B έχουν ίδιες ιδιοτιμές.

Ασκήσεις

Έστω A, B όμοιοι πίνακες, δηλαδή υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P ώστε $B = P^{-1}AP$. Τότε A, B έχουν ίδιες ιδιοτιμές

Απόδειξη: $P_A(x) = det(A - \lambda I)$. Αν λ ιδιοτιμή του A τότε $det(A - \lambda I) = 0$. Αφού $B = P^{-1}AP$ τότε $det(PBP^{-1} - \lambda I) = 0$. Άρα $det(PBP^{-1} - \lambda I) = det(PBP^{-1} - \lambda PIP^{-1}) = det(P(B - \lambda I)P^{-1}) = det(P)det(B - \lambda I)det(P^{-1}) = det(B - \lambda I) = 0$, αφού P αντιστρέψιμος πίνακας και $det(P^{-1})det(P) = 0$.Συνεπώς λ ιδιοτιμή του B. Όμοια μπορούμε να δείξουμε ότι κάθε ιδιοτιμή του B είναι και ιδιοτιμή του A. Άρα οι πίνακες A, B έχουν ίδιες ιδιοτιμές.
Ερώτημα: Αν A, B έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές, είναι όμοιοι;

Έστω A, B όμοιοι πίνακες, δηλαδή υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P ώστε $B = P^{-1}AP$. Τότε A, B έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο

Έστω A, B όμοιοι πίνακες, δηλαδή υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P ώστε $B = P^{-1}AP$. Τότε A, B έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο

Απόδειξη:

Έστω A, B όμοιοι πίνακες, δηλαδή υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P ώστε $B = P^{-1}AP$. Τότε A, B έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο

Απόδειξη: Αφού $B = P^{-1}AP$ τότε

$$\begin{aligned} det(A - \lambda I) =& det(PBP^{-1} - \lambda I) \\ =& det(PBP^{-1} - \lambda PIP^{-1}) \\ =& det(P)det(B - \lambda I)det(P^{-1}) \\ =& det(B - \lambda I). \end{aligned}$$

Αν λ ιδιοτιμή του A τοτε $3\lambda^2 - \lambda + 2$ είναι ιδιοτιμη του $3A^2 - A + 2I$

Αν λ ιδιοτιμή του A τοτε $3\lambda^2 - \lambda + 2$ είναι ιδιοτιμη του $3A^2 - A + 2I$

Απόδειξη:

Αν λ ιδιοτιμή του A τοτε $3\lambda^2 - \lambda + 2$ είναι ιδιοτιμη του $3A^2 - A + 2I$
Απόδειξη:Αφού λ ιδιοτιμή του A τότε υπάρχει $v \neq O$ έτσι ώστε $Av = \lambda v$.

Αν λ ιδιοτιμή του A τοτε $3\lambda^2 - \lambda + 2$ είναι ιδιοτιμη του $3A^2 - A + 2I$
Απόδειξη:Αφού λ ιδιοτιμή του A τότε υπάρχει $v \neq O$ έτσι ώστε $Av = \lambda v$.
Τότε έχουμε $(3A^2 - A + 2I)v = 3A^2v - Av + 2v = 3A\lambda v - \lambda v + 2v = 3\lambda^2 v - \lambda v + 2v = (3\lambda^2 - \lambda + 2)v$.

Αν λ ιδιοτιμή του A τοτε $3\lambda^2 - \lambda + 2$ είναι ιδιοτιμη του $3A^2 - A + 2I$
Απόδειξη:Αφού λ ιδιοτιμή του A τότε υπάρχει $v \neq O$ έτσι ώστε $Av = \lambda v$.
Τότε έχουμε $(3A^2 - A + 2I)v = 3A^2v - Av + 2v = 3A\lambda v - \lambda v + 2v = 3\lambda^2 v - \lambda v + 2v = (3\lambda^2 - \lambda + 2)v$.
Άρα $3\lambda^2 - \lambda + 2$ είναι ιδιοτιμη του $3A^2 - A + 2I$ με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το v.

Γενίκευση

Πρόταση: Έστω λ είναι ιδιοτιμή του A με ιδιοδιάνυσμα v τότε το λ^m είναι ιδιοτιμή του A^m με ιδιοδιάνυσμα v

Γενίκευση

Πρόταση: Έστω λ είναι ιδιοτιμή του A με ιδιοδιάνυσμα v τότε το λ^m είναι ιδιοτιμή του A^m με ιδιοδιάνυσμα v
Απόδειξη:

Γενίκευση

Πρόταση: Έστω λ είναι ιδιοτιμή του A με ιδιοδιάνυσμα v τότε το λ^m είναι ιδιοτιμή του A^m με ιδιοδιάνυσμα v
Απόδειξη:Για $m = 1$ η πρόταση ισχύει.

Γενίκευση

Πρόταση: Έστω λ είναι ιδιοτιμή του A με ιδιοδιάνυσμα v τότε το λ^m είναι ιδιοτιμή του A^m με ιδιοδιάνυσμα v
Απόδειξη:Για $m = 1$ η πρόταση ισχύει.
Υποθέτουμε ότι ισχύει η πρόταση για $n = m - 1$ δηλαδή υποθέτουμε ότι αν λ είναι ιδιοτιμή του A τότε το λ^{m-1} είναι ιδιοτιμή του A^{m-1} με ιδιοδιάνυσμα v .

Γενίκευση

Πρόταση: Έστω λ είναι ιδιοτιμή του A με ιδιοδιάνυσμα v τότε το λ^m είναι ιδιοτιμή του A^m με ιδιοδιάνυσμα v
Απόδειξη:Για $m = 1$ η πρόταση ισχύει.
Υποθέτουμε ότι ισχύει η πρόταση για $n = m - 1$ δηλαδή υποθέτουμε ότι αν λ είναι ιδιοτιμή του A τότε το λ^{m-1} είναι ιδιοτιμή του A^{m-1} με ιδιοδιάνυσμα v .
Για $n = m$ έχουμε:

Γενίκευση

Πρόταση: Έστω λ είναι ιδιοτιμή του A με ιδιοδιάνυσμα v τότε το λ^m είναι ιδιοτιμή του A^m με ιδιοδιάνυσμα v
Απόδειξη:Για $m = 1$ η πρόταση ισχύει.
Υποθέτουμε ότι ισχύει η πρόταση για $n = m - 1$ δηλαδή υποθέτουμε ότι αν λ είναι ιδιοτιμή του A τότε το λ^{m-1} είναι ιδιοτιμή του A^{m-1} με ιδιοδιάνυσμα v .
Για $n = m$ έχουμε:

$$\begin{aligned} A^m v &= AA^{m-1} v \\ &= A\lambda v \\ &= \lambda^{m-1} A v \\ &= \lambda^{m-1}\lambda v = \lambda^m v. \end{aligned}$$

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Dr. Φωτιάδης Ανέστης

Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2013-14

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης