ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

Χαραλάμπους Χαρά

Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2013

Αριστοτέλειο
Πανεπιστήμιο
Θεσσαλονίκης

Χρηματοδότηση

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα. Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Σύνοψη

Στην ενότητα αυτή θα μελετηθεί το Θεώρημα των *Cayley – Hamilton* και εφαρμογές του.

Θεώρημα *Cayley − Hamilton*

Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας με χαρακτηριστικό πολυώνυμο το $P_A(x) = (-1)^n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$

Θεώρημα *Cayley* − *Hamilton*

Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας με χαρακτηριστικό πολυώνυμο το $P_A(x) = (-1)^n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$

Τότε, $(-1)^n A^n + \ldots + a_1 A + a_0 I = O$, δηλαδή $P_A(A) = O$

Θεώρημα *Cayley – Hamilton*

Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας με χαρακτηριστικό πολυώνυμο το $P_A(x) = (-1)^n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$

Τότε, $(-1)^n A^n + \ldots + a_1 A + a_0 I = O$, δηλαδή $P_A(A) = O$

Για παράδειγμα, έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & i \\ 0 & 2 & 1+5i \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Θεώρημα *Cayley – Hamilton*

Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας με χαρακτηριστικό πολυώνυμο το $P_A(x) = (-1)^n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$

Τότε, $(-1)^n A^n + \ldots + a_1 A + a_0 I = O$, δηλαδή $P_A(A) = O$

Για παράδειγμα, έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & i \\ 0 & 2 & 1+5i \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Έχουμε

$P_A(x) = -(x-1)(x-2)(x-3) = -x^3 + 6x^2 - 11x + 6$

Θεώρημα *Cayley – Hamilton*

Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας με χαρακτηριστικό πολυώνυμο το $P_A(x) = (-1)^n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$

Τότε, $(-1)^n A^n + \ldots + a_1 A + a_0 I = O$, δηλαδή $P_A(A) = O$

Για παράδειγμα, έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & i \\ 0 & 2 & 1+5i \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Έχουμε

$P_A(x) = -(x-1)(x-2)(x-3) = -x^3 + 6x^2 - 11x + 6$

Τότε θα ισχύει ότι $-A^3 + 6A^2 - 11A + 6I = O$.

Θεώρημα *Cayley − Hamilton*

Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας με χαρακτηριστικό πολυώνυμο το $P_A(x) = (-1)^n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$

Τότε, $(-1)^n A^n + \ldots + a_1 A + a_0 I = O$, δηλαδή $P_A(A) = O$

Για παράδειγμα, έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & i \\ 0 & 2 & 1+5i \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Έχουμε
$P_A(x) = -(x-1)(x-2)(x-3) = -x^3 + 6x^2 - 11x + 6$

Τότε θα ισχύει ότι $-A^3 + 6A^2 - 11A + 6I = O$.
Αν $B = QAQ^{-1}$ τότε ο B θα έχει το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο συνεπώς $-B^3 + 6B^2 - 11B + 6I = O$

Παρατηρούμε ότι

$$-A^3 + 6A^2 - 11A + 6I = O \Rightarrow$$

$$A\left(\frac{-1}{6}(-A^2 + 6A - 11I)\right) = I \Rightarrow$$

$$\frac{-1}{6}(-A^2 + 6A - 11I) = A^{-1}$$

Παρατηρούμε ότι

$$-A^3 + 6A^2 - 11A + 6I = O \Rightarrow$$
$$A(\frac{-1}{6}(-A^2 + 6A - 11I)) = I \Rightarrow$$
$$\frac{-1}{6}(-A^2 + 6A - 11I) = A^{-1}$$

Έστω ότι $P_A(x) = (-1)^n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ και $a_0 \neq 0$.

Παρατηρούμε ότι

$$-A^3 + 6A^2 - 11A + 6I = O \Rightarrow$$
$$A(\frac{-1}{6}(-A^2 + 6A - 11I)) = I \Rightarrow$$
$$\frac{-1}{6}(-A^2 + 6A - 11I) = A^{-1}$$

Έστω ότι $P_A(x) = (-1)^n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ και $a_0 \neq 0$.

Τότε A^{-1} υπάρχει και $A^{-1} = b_{n-1}A^{n-1} + \ldots b_0 I$ για κάποια $b_{n-1}, \ldots, b_0 \in \mathbb{C}$

Ακόμα, από τη σχέση $-A^3 + 6A^2 - 11A + 6I = O$ συμπεραίνουμε ότι οι πίνακες A^3, A^2, A, I είναι γραμμικά εξαρτημένοι.

Ακόμα, από τη σχέση $-A^3 + 6A^2 - 11A + 6I = O$ συμπεραίνουμε ότι οι πίνακες A^3, A^2, A, I είναι γραμμικά εξαρτημένοι.

Γενικότερα, για κάθε $n \times n$ πίνακα B, οι πίνακες $B^n, B^{n-1}, \ldots, B, I$ είναι γραμμικά εξαρτημένοι και το Θεώρημα *Cayley – Hamilton* μας δίνει τους συντελεστές γραμμικής εξάρτησης.

Ακόμα, από τη σχέση $-A^3 + 6A^2 - 11A + 6I = O$ συμπεραίνουμε ότι

$$
\begin{aligned}
&-A^3 + 6A^2 - 11A + 6I = O \Rightarrow \\
&A^3 = 6A^2 - 11A + 6I \Rightarrow \\
&A^4 = 6A^3 - 11A^2 + 6A \Rightarrow \\
&A^4 = 25A^2 - 60A + 36I
\end{aligned}
$$

Ακόμα, από τη σχέση $-A^3 + 6A^2 - 11A + 6I = O$ συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned} -A^3 + 6A^2 - 11A + 6I = O &\Rightarrow \\ A^3 = 6A^2 - 11A + 6I &\Rightarrow \\ A^4 = 6A^3 - 11A^2 + 6A &\Rightarrow \\ A^4 = 25A^2 - 60A + 36I & \end{aligned}$$

και όμοια βρίσκουμε ότι κάθε δύναμη του A θα είναι γραμμικός συνδιασμός των A^2, A, I

Ακόμα, από τη σχέση $-A^3 + 6A^2 - 11A + 6I = O$ συμπεραίνουμε ότι

$$
\begin{aligned}
& -A^3 + 6A^2 - 11A + 6I = O \Rightarrow \\
& A^3 = 6A^2 - 11A + 6I \Rightarrow \\
& A^4 = 6A^3 - 11A^2 + 6A \Rightarrow \\
& A^4 = 25A^2 - 60A + 36I
\end{aligned}
$$

και όμοια βρίσκουμε ότι κάθε δύναμη του A θα είναι γραμμικός συνδιασμός των A^2, A, I

Γενικότερα, για κάθε $n \times n$ πίνακα A έχουμε ότι κάθε δύναμη του A γράφεται σαν γραμμικός συνδιασμός των πινάκων $A^{n-1}, \ldots, A, I$

Έστω λ ιδοτιμή του πίνακα A

Έστω λ ιδοτιμή του πίνακα A
$(\Leftrightarrow det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \exists v \neq O, Av = \lambda v)$

Έστω λ ιδοτιμή του πίνακα A
$(\Leftrightarrow det(A-\lambda I)=0 \Leftrightarrow \exists v \neq O, Av=\lambda v)$

Αλγεβρική πολλαπλότητα t του λ: $P_A(x)=(x-\lambda)^t q(x)$, όπου $(x-\lambda)$ δεν διαιρεί το $q(x)$

Έστω λ ιδοτιμή του πίνακα A
$(\Leftrightarrow det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \exists v \neq O, Av = \lambda v)$

Αλγεβρική πολλαπλότητα t του λ: $P_A(x) = (x - \lambda)^t q(x)$, όπου $(x - \lambda)$ δεν διαιρεί το $q(x)$

Γεωμετρική πολλαπλότητα s του λ: $s = dim(V_\lambda(A))$.

Έστω λ ιδοτιμή του πίνακα A
$(\Leftrightarrow det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \exists v \neq O, Av = \lambda v)$

Αλγεβρική πολλαπλότητα t του λ: $P_A(x) = (x - \lambda)^t q(x)$, όπου $(x - \lambda)$ δεν διαιρεί το $q(x)$

Γεωμετρική πολλαπλότητα s του λ: $s = dim(V_\lambda(A))$. Ισχύει ότι $s \leq t$.

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Dr. Φωτιάδης Ανέστης

Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2013-14

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης