ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

Χαραλάμπους Χαρά

Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2013

Αριστοτέλειο
Πανεπιστήμιο
Θεσσαλονίκης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα. Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Σύνοψη

1. Ενότητα 5. Εσωτερικά γινόμενα σε Ερμητιανούς και Ευκλείδιους χώρους
   - Ορθοκανονικότητα
   - Παραδείγματα
   - Ευκλείδιοι διανυσματικοί χώροι
   - Ιδιότητες

Στην ενότητα αυτή θα μελετηθούν Εσωτερικά γινόμενα σε Ερμητιανούς και Ευκλείδιους χώρους, ορισμοί και ιδιότητες, μήκος διανυσμάτων.

Ορθοκανονικότητα

Θεωρούμε τον χώρο $\mathbb{C}^3$ και τα διανύσματα $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$ της κανονικής βάσης.

Ορθοκανονικότητα

Θεωρούμε τον χώρο $\mathbb{C}^3$ και τα διανύσματα $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)$ της κανονικής βάσης.

Παρατηρούμε ότι $\|e_1\| = \|e_2\| = \|e_3\| = 1$

Ορθοκανονικότητα

Θεωρούμε τον χώρο $\mathbb{C}^3$ και τα διανύσματα $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$ της κανονικής βάσης.

Παρατηρούμε ότι $\|e_1\| = \|e_2\| = \|e_3\| = 1$ και επίσης ότι $\langle e_1, e_2 \rangle = \langle e_1, e_3 \rangle = \langle e_2, e_3 \rangle = 0$

Ορθοκανονικότητα

Θεωρούμε τον χώρο $\mathbb{C}^3$ και τα διανύσματα $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$ της κανονικής βάσης.

Παρατηρούμε ότι $\|e_1\| = \|e_2\| = \|e_3\| = 1$ και επίσης ότι $\langle e_1, e_2\rangle = \langle e_1, e_3\rangle = \langle e_2, e_3\rangle = 0$

Συνεπώς το $\{e_1, e_2, e_3\}$ αποτελεί ορθοκανονικό σύστημα διανυσμάτων, δηλαδή είναι ορθογώνια ανά δύο και τα διανύσματα είναι μοναδιαίου μήκους.

Παράδειγμα

Έστω ο χώρος $\mathbb{C}^n$ εφοδιασμένος με ένα εσωτερικό γινόμενο και $u, w \in \mathbb{C}^n$ τέτοια ώστε $\|u\| = 2, \|w\| = 3, \langle u, w\rangle = 1 - i$. Να βρεθεί το $\|4u - iw\|$

Παράδειγμα

Έστω ο χώρος $\mathbb{C}^n$ εφοδιασμένος με ένα εσωτερικό γινόμενο και $u, w \in \mathbb{C}^n$ τέτοια ώστε $\|u\| = 2, \|w\| = 3, \langle u, w\rangle = 1 - i$. Να βρεθεί το $\|4u - iw\|$

Λύση: Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
\langle 4u - iw, 4u - iw\rangle =& \langle 4u, 4u - iw\rangle + \langle -iw, 4u - w\rangle \\
=& 4\langle u, 4u - iw\rangle - i\langle w, 4u - w\rangle \\
=& 4\langle u, 4u\rangle + 4\langle u, iw\rangle - i\langle w, 4u\rangle - i\langle w, -iw\rangle \\
=& 4^2\langle u, u\rangle + 4i\langle u, w\rangle - 4i\langle w, u\rangle + \langle w, w\rangle \\
=& 4^2 \cdot 4 + 4i(1 - i) - 4i(1 + i) + 1 \cdot 9 = 81
\end{aligned}$$

Παράδειγμα

Έστω ο χώρος $\mathbb{C}^n$ εφοδιασμένος με ένα εσωτερικό γινόμενο και $u, w \in \mathbb{C}^n$ τέτοια ώστε $\|u\| = 2, \|w\| = 3, \langle u, w \rangle = 1 - i$. Να βρεθεί το $\|4u - iw\|$

Λύση: Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
\langle 4u - iw, 4u - iw \rangle =& \langle 4u, 4u - iw \rangle + \langle -iw, 4u - w \rangle \\
=& 4\langle u, 4u - iw \rangle - i\langle w, 4u - w \rangle \\
=& 4\langle u, 4u \rangle + 4\langle u, iw \rangle - i\langle w, 4u \rangle - i\langle w, -iw \rangle \\
=& 4^2\langle u, u \rangle + 4i\langle u, w \rangle - 4i\langle w, u \rangle + \langle w, w \rangle \\
=& 4^2 \cdot 4 + 4i(1 - i) - 4i(1 + i) + 1 \cdot 9 = 81
\end{aligned}$$

Άρα $\|4u - iw\| = \sqrt{\langle 4u - iw, 4u - iw \rangle} = 9$

Ερώτημα: Αν γνωρίζουμε τα μήκη $\|u\|, \|w\|$ δυο διανυσμάτων u, w, ποιές τιμές μπορεί να πάρει το εσωτερικό γινόμενο $\langle u, w\rangle$;

Ερώτημα: Αν γνωρίζουμε τα μήκη $\|u\|, \|w\|$ δυο διανυσμάτων u, w, ποιές τιμές μπορεί να πάρει το εσωτερικό γινόμενο $\langle u, w\rangle$;

Απάντηση: Πρέπει να ικανοποιείται η ανισότητα των $Cauchy - Schwarz$, δηλαδή πρέπει $\|\langle u, w\rangle\| \leq \|u\|\|w\|$

Ερώτημα: Αν γνωρίζουμε τα μήκη $\|u\|, \|w\|$ δυο διανυσμάτων u, w, ποιές τιμές μπορεί να πάρει το εσωτερικό γινόμενο $\langle u, w\rangle$;

Απάντηση: Πρέπει να ικανοποιείται η ανισότητα των $Cauchy - Schwarz$, δηλαδή πρέπει $\|\langle u, w\rangle\| \leq \|u\|\|w\|$

Στο παράδειγμα που είδαμε έχουμε πράγματι $\|\langle u, w\rangle\| = \sqrt{2} \leq \|u\|\|w\| = 6$

Ερώτημα: Ποια είναι η σχέση ανάμεσα στα μήκη $\|v\|, \|kv\|$, όπου $k \in \mathbb{C}$;

Ερώτημα: Ποια είναι η σχέση ανάμεσα στα μήκη $\|v\|, \|kv\|$, όπου $k \in \mathbb{C}$;

Απάντηση: Παρατηρούμε ότι $\langle kv, kv \rangle = k\langle v, kv \rangle = |k|^2 \langle v, v \rangle$. Άρα $\|kv\| = |k| \|v\|$

Παράδειγμα

Αν $u = (1, i, 1) \in \mathbb{C}^3$ τότε ποιο το μήκος $\|u\|$;

Παράδειγμα

Αν $u = (1, i, 1) \in \mathbb{C}^3$ τότε ποιο το μήκος $\|u\|$;

Λύση: $\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle} = \sqrt{3}$

Παράδειγμα

Αν $u = (1, i, 1) \in \mathbb{C}^3$ τότε ποιο το μήκος $\|u\|$;

Λύση: $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle} = \sqrt{3}$

Να βρεθεί ένα διάνυσμα w στην ευθεία του u έτσι ώστε $\|w\| = 2$.

Παράδειγμα

Αν $u = (1, i, 1) \in \mathbb{C}^3$ τότε ποιο το μήκος $\|u\|$;

Λύση: $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle} = \sqrt{3}$

Να βρεθεί ένα διάνυσμα w στην ευθεία του u έτσι ώστε $\|w\| = 2$.

Λύση: w στην ευθεία του u άρα
$w = tu \Rightarrow \|w\| = |t|\|u\| \Rightarrow |t| = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Παράδειγμα

Αν $u = (1, i, 1) \in \mathbb{C}^3$ τότε ποιο το μήκος $\|u\|$;

Λύση: $\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle} = \sqrt{3}$

Να βρεθεί ένα διάνυσμα w στην ευθεία του u έτσι ώστε $\|w\| = 2$.

Λύση: w στην ευθεία του u άρα $w = tu \Rightarrow \|w\| = |t|\|u\| \Rightarrow |t| = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Για παράδειγμα, επιλέγουμε $t = \frac{2}{\sqrt{3}}, w = \frac{2}{\sqrt{3}}u$

Παράδειγμα

Αν $v_1 = (w, 1), v_2 = (-w, 1) \in \mathbb{C}^2$ και $w^{2006} = 1$ τότε να δειχθεί ότι $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$

Παράδειγμα

Αν $v_1 = (w, 1), v_2 = (-w, 1) \in \mathbb{C}^2$ και $w^{2006} = 1$ τότε να δειχθεί ότι $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$

Λύση:

$\langle v_1, v_2 \rangle = \langle (w, 1), (-w, 1) \rangle = w \cdot \overline{(-w)} + 1 \cdot 1 = -|w|^2 + 1$

Παράδειγμα

Αν $v_1 = (w, 1), v_2 = (-w, 1) \in \mathbb{C}^2$ και $w^{2006} = 1$ τότε να δειχθεί ότι $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$

Λύση:
$\langle v_1, v_2 \rangle = \langle (w, 1), (-w, 1) \rangle = w \cdot \overline{(-w)} + 1 \cdot 1 = -|w|^2 + 1$

Αν $w = re^{i\theta}$ τότε $w^{2006} = r^{2006} e^{i2006\theta} = 1$ άρα
$2006\theta = 2k\pi, r = 1$ συνεπώς $|w| = 1$ και άρα $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$

Ευκλείδιοι διανυσματικοί χώροι

Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^n$ εφοδιασμένο με ένα εσωτερικό γινόμενο.
Για το συνήθες εσωτερικό γινόμενο έχουμε ότι αν
$v = (a_1, \ldots, a_n), w = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$

Ευκλείδιοι διανυσματικοί χώροι

Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^n$ εφοδιασμένο με ένα εσωτερικό γινόμενο.
Για το συνήθες εσωτερικό γινόμενο έχουμε ότι αν
$v = (a_1, \ldots, a_n), w = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$
τότε $\langle v, w \rangle = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n = v^T w$,

Ευκλείδιοι διανυσματικοί χώροι

Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^n$ εφοδιασμένο με ένα εσωτερικό γινόμενο.
Για το συνήθες εσωτερικό γινόμενο έχουμε ότι αν
$v = (a_1, \ldots, a_n), w = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$
τότε $\langle v, w \rangle = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n = v^T w$,
όπου τώρα θεωρούμε $v = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

Ιδιότητες

1. $\langle u_1, u_2 \rangle = \langle u_2, u_1 \rangle$

Ιδιότητες

1. $\langle u_1, u_2 \rangle = \langle u_2, u_1 \rangle$
2. $\langle v, v \rangle \in \mathbb{R}_+$ και $\langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$

Ιδιότητες

1. $\langle u_1, u_2 \rangle = \overline{\langle u_2, u_1 \rangle}$
2. $\langle v, v \rangle \in \mathbb{R}_+$ και $\langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$
3. $\langle u_1 + u_2, w \rangle = \langle u_1, w \rangle + \langle u_2, w \rangle$

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Dr. Φωτιάδης Ανέστης

Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2013-14

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης