ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

Χαραλάμπους Χαρά

Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2013

Αριστοτέλειο
Πανεπιστήμιο
Θεσσαλονίκης

Χρηματοδότηση

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα. Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Σύνοψη

1. Ενότητα 6. Ορθοκανονικές βάσεις
   - Πυθαγόρειο Θεώρημα
   - Προβολές διανυσμάτων
   - Πρόταση

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε Ορθογώνια διανύσματα, προβολές, ιδιότητες ορθογώνιας βάσης, ορθογώνιο συμπλήρωμα, Προβολές, ανισότητα $Cauchy - Scwarz$(απόδειξη με προβολή), μέθοδος των $Gram - Schmidt$

Πυθαγόρειο Θεώρημα

Θεωρούμε τον χώρο $\mathbb{C}^n(\mathbb{R}^n)$ εφοδιασμένο με ένα εσωτερικό γινόμενο, δηλαδή $\mathbb{C}^n(\mathbb{R}^n)$ Ερμητιανόσ(Ευκλείδιος).

Πυθαγόρειο Θεώρημα

Θεωρούμε τον χώρο $\mathbb{C}^n(\mathbb{R}^n)$ εφοδιασμένο με ένα εσωτερικό γινόμενο, δηλαδή $\mathbb{C}^n(\mathbb{R}^n)$ Ερμητιανόσ(Ευκλείδιος).

$$v_1 \perp v_2 \Leftrightarrow \langle v_1, v_2 \rangle = 0$$

$$\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0, \|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

Έστω $v_1, v_2 \in \mathbb{C}^n, \langle v_1, v_2 \rangle = 0 \Leftrightarrow \overline{\langle v_1, v_2 \rangle} = 0$, τότε
$\|v_1 + v_2\|^2 = \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2$ (Πυθαγόρειο Θεώρημα)

Πυθαγόρειο Θεώρημα

Θεωρούμε τον χώρο $\mathbb{C}^n(\mathbb{R}^n)$ εφοδιασμένο με ένα εσωτερικό γινόμενο, δηλαδή $\mathbb{C}^n(\mathbb{R}^n)$ Ερμητιανόσ(Ευκλείδιος).

$$v_1 \perp v_2 \Leftrightarrow \langle v_1, v_2 \rangle = 0$$
$$\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0, \|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

Έστω $v_1, v_2 \in \mathbb{C}^n, \langle v_1, v_2 \rangle = 0 \Leftrightarrow \overline{\langle v_1, v_2 \rangle} = 0$, τότε $\|v_1 + v_2\|^2 = \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2$ (Πυθαγόρειο Θεώρημα)

Απόδειξη:

$$\|v_1 + v_2\|^2 = \langle v_1 + v_2, v_1 + v_2 \rangle = \langle v_1, v_1 \rangle + \langle v_1, v_2 \rangle + \langle v_2, v_2 \rangle + \langle v$$
$$= \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2$$

Πυθαγόρειο Θεώρημα

Θεωρούμε τον χώρο $\mathbb{C}^n(\mathbb{R}^n)$ εφοδιασμένο με ένα εσωτερικό γινόμενο, δηλαδή $\mathbb{C}^n(\mathbb{R}^n)$ Ερμητιανόσ(Ευκλείδιος).

$$v_1 \perp v_2 \Leftrightarrow \langle v_1, v_2 \rangle = 0$$
$$\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0, \|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

Έστω $v_1, v_2 \in \mathbb{C}^n, \langle v_1, v_2 \rangle = 0 \Leftrightarrow \overline{\langle v_1, v_2 \rangle} = 0$, τότε $\|v_1 + v_2\|^2 = \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2$ (Πυθαγόρειο Θεώρημα)

Απόδειξη:

$$\begin{aligned}\|v_1 + v_2\|^2 &= \langle v_1 + v_2, v_1 + v_2 \rangle = \langle v_1, v_1 \rangle + \langle v_1, v_2 \rangle + \langle v_2, v_2 \rangle + \langle \\ &= \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2\end{aligned}$$

Ερώτημα: Ισχύει το αντίστροφο;

Προβολές διανυσμάτων

Έστω $(1, 1, 2), (1, 2, 3) \in \mathbb{C}^n$ εφοδιασμένο με το συνήθες εσωτερικό γινόμενο.

Προβολές διανυσμάτων

Έστω $(1,1,2),(1,2,3) \in \mathbb{C}^n$ εφοδιασμένο με το συνήθες εσωτερικό γινόμενο. Παρατηρούμε ότι $langlev_1, v_2\rangle = 9 \neq 0$

Προβολές διανυσμάτων

Έστω $(1,1,2),(1,2,3) \in \mathbb{C}^n$ εφοδιασμένο με το συνήθες εσωτερικό γινόμενο. Παρατηρούμε ότι $langlev_1, v_2\rangle = 9 \neq 0$
Να βρεθεί η προβολή $proj_{v_1} v_2$ του v_2 στο v_1

Προβολές διανυσμάτων

Έστω $(1, 1, 2), (1, 2, 3) \in \mathbb{C}^n$ εφοδιασμένο με το συνήθες εσωτερικό γινόμενο. Παρατηρούμε ότι $langlev_1, v_2\rangle = 9 \neq 0$ Να βρεθεί η προβολή $proj_{v_1} v_2$ του v_2 στο v_1

Λύση: Γνωρίζουμε ότι $proj_{v_1} v_2 = tv_1$. Ποιο είναι το t;

Προβολές διανυσμάτων

Έστω $(1, 1, 2), (1, 2, 3) \in \mathbb{C}^n$ εφοδιασμένο με το συνήθες εσωτερικό γινόμενο. Παρατηρούμε ότι $langlev_1, v_2\rangle = 9 \neq 0$ Να βρεθεί η προβολή $proj_{v_1} v_2$ του v_2 στο v_1

Λύση: Γνωρίζουμε ότι $proj_{v_1} v_2 = tv_1$. Ποιο είναι το t;
Θεωρούμε $w = v_1 - proj_{v_1} v_2$ με $\langle w, v_1\rangle = 0$

Προβολές διανυσμάτων

Έστω $(1,1,2),(1,2,3) \in \mathbb{C}^n$ εφοδιασμένο με το συνήθες εσωτερικό γινόμενο. Παρατηρούμε ότι $langlev_1, v_2\rangle = 9 \neq 0$ Να βρεθεί η προβολή $proj_{v_1} v_2$ του v_2 στο v_1

Λύση: Γνωρίζουμε ότι $proj_{v_1} v_2 = tv_1$. Ποιο είναι το t;
Θεωρούμε $w = v_1 - proj_{v_1} v_2$ με $\langle w, v_1\rangle = 0$
Άρα έχουμε

$$tv_1 + w = v_2, \langle w, v_1\rangle = 0 \Rightarrow$$
$$t\langle v_1 + w, v_1\rangle^2 = \langle v_2, v_1\rangle \Rightarrow$$
$$t\|v_1\|^2 = \langle v_2, v_1\rangle \Rightarrow$$
$$t = \frac{\langle v_2, v_1\rangle}{\|v_1\|^2}$$

Γενικό συμπέρασμα: Αν $v_1 \neq 0$ τότε $proj_{v_1} v_2 = \frac{\langle v_2, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1$ και $w = v_2 - proj_{v_1} v_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1$

Γενικό συμπέρασμα: Αν $v_1 \neq 0$ τότε $proj_{v_1} v_2 = \frac{\langle v_2, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1$ και $w = v_2 - proj_{v_1} v_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1$

Στο παράδειγμά μας είναι $proj_{v_1} v_2 = \frac{9}{6}(1, 1, 2)$ και $w = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$.

Γενικό συμπέρασμα: Αν $v_1 \neq 0$ τότε $proj_{v_1} v_2 = \frac{\langle v_2, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1$ και $w = v_2 - proj_{v_1} v_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1$

Στο παράδειγμά μας είναι $proj_{v_1} v_2 = \frac{9}{6}(1, 1, 2)$ και
$w = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$.
Είναι $w = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0) \perp v_1$ και άρα $kw \perp v_1, \forall k \in \mathbb{C}$

Γενικό συμπέρασμα: Αν $v_1 \neq 0$ τότε $proj_{v_1} v_2 = \frac{\langle v_2, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1$ και $w = v_2 - proj_{v_1} v_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1$

Στο παράδειγμά μας είναι $proj_{v_1} v_2 = \frac{9}{6}(1, 1, 2)$ και
$w = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$.
Είναι $w = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0) \perp v_1$ και άρα $kw \perp v_1, \forall k \in \mathbb{C}$
Ερώτημα: Υπάρχει διάνυσμα $u \perp v_1$ που δεν είναι αυτής της μορφής kw;

Γενικό συμπέρασμα: Αν $v_1 \neq 0$ τότε $proj_{v_1} v_2 = \frac{\langle v_2, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1$ και
$w = v_2 - proj_{v_1} v_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1$

Στο παράδειγμά μας είναι $proj_{v_1} v_2 = \frac{9}{6}(1, 1, 2)$ και
$w = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$.
Είναι $w = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0) \perp v_1$ και άρα $kw \perp v_1, \forall k \in \mathbb{C}$
Ερώτημα: Υπάρχει διάνυσμα $u \perp v_1$ που δεν είναι αυτής της μορφής kw;
Πράγματι υπάρχει τέτοιο διάνυσμα, πχ
$u = (-2, 0, 1) \notin S(w)$, όπου $S(w) = \{kw : k \in \mathbb{C}\}$

Γενικό συμπέρασμα: Αν $v_1 \neq 0$ τότε $proj_{v_1} v_2 = \frac{\langle v_2, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1$ και
$w = v_2 - proj_{v_1} v_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1$

Στο παράδειγμά μας είναι $proj_{v_1} v_2 = \frac{9}{6}(1, 1, 2)$ και
$w = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$.
Είναι $w = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0) \perp v_1$ και άρα $kw \perp v_1, \forall k \in \mathbb{C}$
Ερώτημα: Υπάρχει διάνυσμα $u \perp v_1$ που δεν είναι αυτής της μορφής kw;
Πράγματι υπάρχει τέτοιο διάνυσμα, πχ
$u = (-2, 0, 1) \notin S(w)$, όπου $S(w) = \{kw : k \in \mathbb{C}\}$. Όμοια αν πχ $u = (0, -2, 1)$

Θα μελετήσουμε σύνολο των διανυσμάτων $u = (x, y, z)$ που είναι κάθετα στο $v_1 = (1, 1, 2)$. Είναι διανυσματικός χώρος.

Θα μελετήσουμε σύνολο των διανυσμάτων $u = (x, y, z)$ που είναι κάθετα στο $v_1 = (1, 1, 2)$. Είναι διανυσματικός χώρος. Πράγματι, $u \perp v_1 = 0 \Leftrightarrow x + y + 2z = 0$, δηλαδή το σύνολο όλων αυτών των διανυσμάτων είναι ο χώρος $\{(x, y, z) : x + y + 2z = 0\}$ που είναι ένας διδιάστατος διανυσματικός χώρος

Θα μελετήσουμε σύνολο των διανυσμάτων $u = (x, y, z)$ που είναι κάθετα στο $v_1 = (1, 1, 2)$. Είναι διανυσματικός χώρος.
Πράγματι, $u \perp v_1 = 0 \Leftrightarrow x + y + 2z = 0$, δηλαδή το σύνολο όλων αυτών των διανυσμάτων είναι ο χώρος
$\{(x, y, z) : x + y + 2z = 0\}$ που είναι ένας διδιάστατος διανυσματικός χώρος
Θα μελετήσουμε σύνολο των διανυσμάτων $u = (x, y, z)$ που είναι κάθετα στο $v = (1, i, 5 - 2i)$. Είναι διανυσματικός χώρος.

Θα μελετήσουμε σύνολο των διανυσμάτων $u = (x, y, z)$ που είναι κάθετα στο $v_1 = (1, 1, 2)$. Είναι διανυσματικός χώρος. Πράγματι, $u \perp v_1 = 0 \Leftrightarrow x + y + 2z = 0$, δηλαδή το σύνολο όλων αυτών των διανυσμάτων είναι ο χώρος $\{(x, y, z) : x + y + 2z = 0\}$ που είναι ένας διδιάστατος διανυσματικός χώρος

Θα μελετήσουμε σύνολο των διανυσμάτων $u = (x, y, z)$ που είναι κάθετα στο $v = (1, i, 5 - 2i)$. Είναι διανυσματικός χώρος. Πράγματι, $u \perp v_1 = 0 \Leftrightarrow x - iy + (5 + 2i)z = 0$, δηλαδή το σύνολο όλων αυτών των διανυσμάτων είναι ο χώρος $\{(x, y, z) : x - iy + (5 + 2i)z = 0\}$ που είναι ένας διδιάστατος διανυσματικός χώρος

Πρόταση

Έστω V διανυσματικός χώρος με βάση $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Έστω ότι $\langle u, v_1\rangle = \langle u, v_2\rangle = \cdots = \langle u, v_n\rangle = 0$ τότε $\langle u, v\rangle = 0, \forall v \in V$.

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Dr. Φωτιάδης Ανέστης

Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2013-14

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης