ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

Χαραλάμπους Χαρά

Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2013

Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Χρηματοδότηση

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα. Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Σύνοψη

1. Ενότητα 6. Ορθοκανονικές βάσεις
   - Προτάσεις

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε Ορθογώνια διανύσματα, προβολές, ιδιότητες ορθογώνιας βάσης, ορθογώνιο συμπλήρωμα, Προβολές, ανισότητα $Cauchy - Scwarz$(απόδειξη με προβολή), μέθοδος των $Gram - Schmidt$

Πρόταση

Έστω V διανυσματικός χώρος με βάση $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Έστω ότι $\langle u, v_1\rangle = \langle u, v_2\rangle = \cdots = \langle u, v_n\rangle = 0$ τότε $\langle u, v\rangle = 0, \forall v \in V$.

Πρόταση

Έστω V διανυσματικός χώρος με βάση $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Έστω ότι $\langle u, v_1\rangle = \langle u, v_2\rangle = \cdots = \langle u, v_n\rangle = 0$ τότε $\langle u, v\rangle = 0, \forall v \in V$.

Απόδειξη: Έστω $v \in V \Rightarrow \exists k_1, \dots k_n \in \mathbb{C}$ έτσι ώστε $v = k_1 v_1 + \cdots k_n v_n$.

Πρόταση

Έστω V διανυσματικός χώρος με βάση $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.
Έστω ότι $\langle u, v_1\rangle = \langle u, v_2\rangle = \cdots = \langle u, v_n\rangle = 0$ τότε $\langle u, v\rangle = 0, \forall v \in V$.

Απόδειξη: Έστω $v \in V \Rightarrow \exists k_1, \ldots k_n \in \mathbb{C}$ έτσι ώστε $v = k_1 v_1 + \cdots k_n v_n$.
Τότε
$\langle u, v\rangle = \langle u, k_1 v_1 + \cdots k_n v_n\rangle = \overline{k}_1\langle u, v_1\rangle + \cdots + \overline{k}_n\langle u, v_n\rangle = 0$

Ορισμός: Έστω V ένας $\mathbb{C}$ διανυσματικός υποχώρος του $\mathbb{C}^n$ τότε $V^\perp$ είναι το σύνολο όλων των διανυσμάτων που είναι ορθογώνια σε κάθε διάνυσμα του V, δηλαδή

$$V^\perp = \{u : \langle u, v \rangle = 0, \forall v \in V\}$$

Πρόταση

Το σύνολο $V^{\perp}$ είναι διανυσματικός υποχώρος του $\mathbb{C}^n$

Πρόταση

Το σύνολο $V^{\perp}$ είναι διανυσματικός υποχώρος του $\mathbb{C}^n$

Απόδειξη: Έστω $u_1, u_2 \in V^{\perp}$. Αν $v \in V$ τότε
$\langle u_1 + u_2, v\rangle = \langle u_1, v\rangle + \langle u_2, v\rangle = 0$ άρα $u_1 + u_2 \in V^{\perp}$

Πρόταση

Το σύνολο $V^{\perp}$ είναι διανυσματικός υποχώρος του $\mathbb{C}^n$

Απόδειξη: Έστω $u_1, u_2 \in V^{\perp}$. Αν $v \in V$ τότε
$\langle u_1 + u_2, v\rangle = \langle u_1, v\rangle + \langle u_2, v\rangle = 0$ άρα $u_1 + u_2 \in V^{\perp}$

Έστω $u \in V^{\perp}$ και $k \in \mathbb{C}$. Αν $v \in V$ τότε
$\langle ku, v\rangle = k\langle u, v\rangle = 0$ άρα $ku \in V^{\perp}$

Πρόταση

Το σύνολο $V^{\perp}$ είναι διανυσματικός υποχώρος του $\mathbb{C}^n$

Απόδειξη: Έστω $u_1, u_2 \in V^{\perp}$. Αν $v \in V$ τότε
$\langle u_1 + u_2, v \rangle = \langle u_1, v \rangle + \langle u_2, v \rangle = 0$ άρα $u_1 + u_2 \in V^{\perp}$

Έστω $u \in V^{\perp}$ και $k \in \mathbb{C}$. Αν $v \in V$ τότε
$\langle ku, v \rangle = k\langle u, v \rangle = 0$ άρα $ku \in V^{\perp}$

Άρα $V^{\perp}$ είναι διανυσματικός χώρος

Πρόταση

Έστω $\{v_1, \cdots, v_l\}$ βάση του V τότε
$u \in V^{\perp} \Leftrightarrow \langle u, v_i \rangle, \forall i = 1, \ldots, l$

Πρόταση

Γιατί μας είναι χρήσιμες οι ορθογώνιες βάσεις;

Πρόταση

Γιατί μας είναι χρήσιμες οι ορθογώνιες βάσεις:
Έστω $\{v_1, \cdots, v_l\}$ ορθογώνια βάση του V. Αν $v \in V, v = k_1 v_1 + \cdots k_l v_l$ τότε $k_1 = \frac{\langle v, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle}, \ldots, k_l = \frac{\langle v, v_l \rangle}{\langle v_l, v_l \rangle}$

Πρόταση

Γιατί μας είναι χρήσιμες οι ορθογώνιες βάσεις:
Έστω $\{v_1, \cdots, v_l\}$ ορθογώνια βάση του V. Αν $v \in V, v = k_1 v_1 + \cdots k_l v_l$ τότε $k_1 = \frac{\langle v, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle}, \ldots, k_l = \frac{\langle v, v_l \rangle}{\langle v_l, v_l \rangle}$

$\Leftrightarrow$ Έστω $\{v_1, \cdots, v_l\}$ ορθογώνια βάση του V. Αν $v \in V$ τότε $v = proj_{v_1} v + \cdots + proj_{v_l} v$

Παρατηρούμε ότι $proj_V w \in V, w' = w - proj_V w \in V^{\perp}$ και $w = w' + proj_V w$

Παρατηρούμε ότι $proj_V w \in V, w' = w - proj_V w \in V^\perp$ και $w = w' + proj_V w$

Άρα $\langle w, v \rangle = \langle w', v \rangle + \langle proj_V w, v \rangle = \langle proj_V w, v \rangle$. Προκύπτει ότι $proj_V w = proj_{v_1} w + \cdots + proj_{v_l} w$, όπου $\{v_1, \cdots, v_l\}$ ορθογώνια βάση του V.

Παράδειγμα

Θεωρούμε τα διανύσματα
$v_1 = (1,1,0,0), v_2 = (1,2,1,1) \in \mathbb{R}^4$

Παράδειγμα

Θεωρούμε τα διανύσματα
$v_1 = (1, 1, 0, 0), v_2 = (1, 2, 1, 1) \in \mathbb{R}^4$
Έχουμε ότι $\langle v_1, v_2 \rangle = 3$, άρα δεν έχουμε ορθογώνια διανύσματα.

Παράδειγμα

Θεωρούμε τα διανύσματα
$v_1 = (1, 1, 0, 0), v_2 = (1, 2, 1, 1) \in \mathbb{R}^4$
Έχουμε ότι $\langle v_1, v_2 \rangle = 3$, άρα δεν έχουμε ορθογώνια διανύσματα.
Έστω $v_3 = (1, 0, 0, 1) \in \mathbb{R}^4$. Παρατηρούμε ότι το v_3 δεν είναι γραμμικός συνδιασμός των v_1, v_2. Έστω V ο χώρος που παράγουνε τα διανύσματα v_1, v_2.

Παράδειγμα

Θεωρούμε τα διανύσματα
$v_1 = (1, 1, 0, 0), v_2 = (1, 2, 1, 1) \in \mathbb{R}^4$
Έχουμε ότι $\langle v_1, v_2 \rangle = 3$, άρα δεν έχουμε ορθογώνια διανύσματα.
Έστω $v_3 = (1, 0, 0, 1) \in \mathbb{R}^4$. Παρατηρούμε ότι το v_3 δεν είναι γραμμικός συνδιασμός των v_1, v_2. Έστω V ο χώρος που παράγουνε τα διανύσματα v_1, v_2.
Θα βρούμε μια ορθογώνια βάση του V:

Παράδειγμα

Θεωρούμε τα διανύσματα
$v_1 = (1, 1, 0, 0), v_2 = (1, 2, 1, 1) \in \mathbb{R}^4$
Έχουμε ότι $\langle v_1, v_2 \rangle = 3$, άρα δεν έχουμε ορθογώνια διανύσματα.
Έστω $v_3 = (1, 0, 0, 1) \in \mathbb{R}^4$. Παρατηρούμε ότι το v_3 δεν είναι γραμμικός συνδιασμός των v_1, v_2. Έστω V ο χώρος που παράγουνε τα διανύσματα v_1, v_2.
Θα βρούμε μια ορθογώνια βάση του V:
Έχουμε $proj_{v_1} v_2 = \frac{3}{2} v_1 = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0, 0)$ και άρα
$v_2' = v_2 - proj_{v_1} v_2 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 1)$

Παράδειγμα

Θεωρούμε τα διανύσματα
$v_1 = (1,1,0,0)$, $v_2 = (1,2,1,1) \in \mathbb{R}^4$
Έχουμε ότι $\langle v_1, v_2 \rangle = 3$, άρα δεν έχουμε ορθογώνια διανύσματα.
Έστω $v_3 = (1,0,0,1) \in \mathbb{R}^4$. Παρατηρούμε ότι το v_3 δεν είναι γραμμικός συνδιασμός των v_1, v_2. Έστω V ο χώρος που παράγουνε τα διανύσματα v_1, v_2.
Θα βρούμε μια ορθογώνια βάση του V:
Έχουμε $proj_{v_1} v_2 = \frac{3}{2} v_1 = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0, 0)$ και άρα
$v_2' = v_2 - proj_{v_1} v_2 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 1)$

Τότε $v_1, v_2' \in V$ γραμμικά ανεξάρτητα, ορθογώνια βάση του V.

Παράδειγμα

Θεωρούμε τα διανύσματα
$v_1 = (1,1,0,0), v_2 = (1,2,1,1) \in \mathbb{R}^4$
Έχουμε ότι $\langle v_1, v_2 \rangle = 3$, άρα δεν έχουμε ορθογώνια διανύσματα.
Έστω $v_3 = (1,0,0,1) \in \mathbb{R}^4$. Παρατηρούμε ότι το v_3 δεν είναι γραμμικός συνδιασμός των v_1, v_2. Έστω V ο χώρος που παράγουνε τα διανύσματα v_1, v_2.
Θα βρούμε μια ορθογώνια βάση του V:
Έχουμε $proj_{v_1} v_2 = \frac{3}{2} v_1 = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0, 0)$ και άρα
$v_2' = v_2 - proj_{v_1} v_2 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 1)$

Τότε $v_1, v_2' \in V$ γραμμικά ανεξάρτητα, ορθογώνια βάση του V.
Τότε και τα διανύσματα $w_1 = (1,1,0,0), w_2 = (-1,1,2,2)$ γραμμικά ανεξάρτητα, ορθογώνια βάση του V.

Τότε $proj_V v_3 = proj_{w_1} v_3 + proj_{w_2} v_3$

Τότε $proj_V v_3 = proj_{w_1} v_3 + proj_{w_2} v_3$
όπου $proj_{w_1} v_3 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0)$, $proj_{w_2} v_3 = \frac{1}{10}(-1, 1, 2, 2)$

Τότε $proj_V v_3 = proj_{w_1} v_3 + proj_{w_2} v_3$
όπου $proj_{w_1} v_3 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0)$, $proj_{w_2} v_3 = \frac{1}{10}(-1, 1, 2, 2)$

Η προβολή θα είναι η ίδια, ανεξάρτητα από τα διανύσματα της βάσης του V που έχουμε επιλέξει

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Dr. Φωτιάδης Ανέστης

Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2013-14

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης