ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

Χαραλάμπους Χαρά

Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2013

Αριστοτέλειο
Πανεπιστήμιο
Θεσσαλονίκης

Χαραλάμπους Χαρά

Ενότητα 6. Ορθοκανονικές βάσεις

Μέθοδος προσσεγγιστικών λύσεων - εύρεση των ελαχίστων τετραγώνων

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα. Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Σύνοψη

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε Ορθογώνια διανύσματα, προβολές, ιδιότητες ορθογώνιας βάσης, ορθογώνιο συμπλήρωμα, Προβολές, ανισότητα $Cauchy - Scwarz$(απόδειξη με προβολή), μέθοδος των $Gram - Schmidt$

Συνέχεια Άσκησης

Αν $proj_U(e_1) = e_1 \Leftrightarrow e_1 \in U$ τότε θα επιλέγαμε το e_2. Αν $e_2 \in U$ τότε επιλέγουμε το e_3. Δεν είναι δυνατόν να έχουμε ταυτόχρονα τις σχέσεις $e_i \in U, i = 1, 2, 3$ γιατί διαφορετικά $U = \mathbb{R}^3$, άτοπο αφού $dim(U) = 2$

Αν $\{u_1, u_2, u_3\}$ ορθογώνια βάση τότε

$$B = \{\frac{u_1}{\|u_1\|}, \frac{u_2}{\|u_2\|}, \frac{u_3}{\|u_3\|}\}$$

ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^3$

Άσκηση

Να μετατραπεί η βάση $B = \{(1,0,1),(2,1,-3),(1,-1,0)\}$ $\mathbb{R}^3$ σε ορθοκανονική με τη μέθοδο των $Gram - Schmidt$.

Άσκηση

Να μετατραπεί η βάση $B = \{(1,0,1),(2,1,-3),(1,-1,0)\}$ $\mathbb{R}^3$ σε ορθοκανονική με τη μέθοδο των *Gram* – *Schmidt*.

Λύση: Θα βρούμε πρώτα μια ορθογώνια βάση και μετά θα την ορθοκανονικοποιήσουμε.

Άσκηση

Να μετατραπεί η βάση $B = \{(1,0,1),(2,1,-3),(1,-1,0)\}$ $\mathbb{R}^3$ σε ορθοκανονική με τη μέθοδο των *Gram − Schmidt*.

Λύση: Θα βρούμε πρώτα μια ορθογώνια βάση και μετά θα την ορθοκανονικοποιήσουμε.

1. $u_1' = u_1 = (1,0,1)$

Άσκηση

Να μετατραπεί η βάση $B = \{(1,0,1),(2,1,-3),(1,-1,0)\}$ $\mathbb{R}^3$ σε ορθοκανονική με τη μέθοδο των *Gram – Schmidt*.

Λύση: Θα βρούμε πρώτα μια ορθογώνια βάση και μετά θα την ορθοκανονικοποιήσουμε.

1. $u_1' = u_1 = (1,0,1)$
2. $u_2' = u_2 - \frac{\langle u_2,u_1\rangle}{\langle u_1,u_1\rangle} u_1 = (\frac{5}{2}, \frac{2}{2}, -\frac{5}{2})$

Άσκηση

Να μετατραπεί η βάση $B = \{(1,0,1),(2,1,-3),(1,-1,0)\}$ $\mathbb{R}^3$ σε ορθοκανονική με τη μέθοδο των *Gram – Schmidt*.

Λύση: Θα βρούμε πρώτα μια ορθογώνια βάση και μετά θα την ορθοκανονικοποιήσουμε.

1. $u_1' = u_1 = (1,0,1)$
2. $u_2' = u_2 - \frac{\langle u_2, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 = (\frac{5}{2}, \frac{2}{2}, -\frac{5}{2})$Τότε το $U_{1,2}$ έχει μια ορθογώνια βάση την $\{w_1 = (1,0,1), w_2 = (5,2,-5)\}$

Άσκηση

Να μετατραπεί η βάση $B = \{(1,0,1),(2,1,-3),(1,-1,0)\}$ $\mathbb{R}^3$ σε ορθοκανονική με τη μέθοδο των $Gram - Schmidt$.

Λύση: Θα βρούμε πρώτα μια ορθογώνια βάση και μετά θα την ορθοκανονικοποιήσουμε.

1. $u_1' = u_1 = (1,0,1)$
2. $u_2' = u_2 - \frac{\langle u_2,u_1\rangle}{\langle u_1,u_1\rangle}u_1 = (\frac{5}{2},\frac{2}{2},-\frac{5}{2})$Τότε το $U_{1,2}$ έχει μια ορθογώνια βάση την $\{w_1 = (1,0,1), w_2 = (5,2,-5)\}$
3. $u_3' = u_3 - proj_{U_{1,2}}(u_3) = u_3 - \frac{\langle u_3,w_1\rangle}{\langle w_1,w_1\rangle}w_1 - \frac{\langle u_3,w_2\rangle}{\langle w_2,w_2\rangle}w_2$

Άσκηση

Να μετατραπεί η βάση $B = \{(1,0,1),(2,1,-3),(1,-1,0)\}$ $\mathbb{R}^3$ σε ορθοκανονική με τη μέθοδο των *Gram – Schmidt*.

Λύση: Θα βρούμε πρώτα μια ορθογώνια βάση και μετά θα την ορθοκανονικοποιήσουμε.

1. $u_1' = u_1 = (1,0,1)$

2. $u_2' = u_2 - \frac{\langle u_2,u_1\rangle}{\langle u_1,u_1\rangle} u_1 = (\frac{5}{2},\frac{2}{2},-\frac{5}{2})$Τότε το $U_{1,2}$ έχει μια ορθογώνια βάση την $\{w_1 = (1,0,1), w_2 = (5,2,-5)\}$

3. $u_3' = u_3 - proj_{U_{1,2}}(u_3) = u_3 - \frac{\langle u_3,w_1\rangle}{\langle w_1,w_1\rangle} w_1 - \frac{\langle u_3,w_2\rangle}{\langle w_2,w_2\rangle} w_2$

Άρα μια ορθογώνια βάση του $\mathbb{R}^3$ είναι η $\{w_1, w_2, u_3'\}$

Άσκηση

Να μετατραπεί η βάση $B = \{(1,0,1),(2,1,-3),(1,-1,0)\}$ $\mathbb{R}^3$ σε ορθοκανονική με τη μέθοδο των *Gram – Schmidt*.

Λύση: Θα βρούμε πρώτα μια ορθογώνια βάση και μετά θα την ορθοκανονικοποιήσουμε.

1. $u_1' = u_1 = (1,0,1)$
2. $u_2' = u_2 - \frac{\langle u_2,u_1\rangle}{\langle u_1,u_1\rangle} u_1 = (\frac{5}{2}, \frac{2}{2}, -\frac{5}{2})$Τότε το $U_{1,2}$ έχει μια ορθογώνια βάση την $\{w_1 = (1,0,1), w_2 = (5,2,-5)\}$
3. $u_3' = u_3 - proj_{U_{1,2}}(u_3) = u_3 - \frac{\langle u_3,w_1\rangle}{\langle w_1,w_1\rangle} w_1 - \frac{\langle u_3,w_2\rangle}{\langle w_2,w_2\rangle} w_2$

Άρα μια ορθογώνια βάση του $\mathbb{R}^3$ είναι η $\{w_1, w_2, u_3'\}$

4. Η ορθοκανονική βάση που θα προκύψει με τη μέθοδο αυτή των *Gram – Schmidt* είναι η

$$B = \{\frac{w_1}{\|w_1\|}, \frac{w_2}{\|w_2\|}, \frac{u_3'}{\|u_3'\|}$$

Μέθοδος προσσεγγιστικών λύσεων - εύρεση των ελαχίστων τετραγώνων

Έστω ότι το σύστημα $AX = B$ δεν έχει λύσεις.

Μέθοδος προσσεγγιστικών λύσεων - εύρεση των ελαχίστων τετραγώνων

Έστω ότι το σύστημα $AX = B$ δεν έχει λύσεις.
Υπάρχει βέλτιστη προσσεγγιστική λύση; Μπορώ να βρω Z έτσι ώστε $AZ - B$ όσο το δυνατόν πιο μικρή;
Δηλαδή θέλουμε $\|AZ - B\|$ όσο το δυνατόν πιο μικρό.

Μέθοδος προσσεγγιστικών λύσεων - εύρεση των ελαχίστων τετραγώνων

Έστω ότι το σύστημα $AX = B$ δεν έχει λύσεις.
Υπάρχει βέλτιστη προσσεγγιστική λύση; Μπορώ να βρω Z έτσι ώστε $AZ - B$ όσο το δυνατόν πιο μικρή;
Δηλαδή θέλουμε $\|AZ - B\|$ όσο το δυνατόν πιο μικρό.
Παρατηρούμε ότι το σύστημα $AQ = B$ είναι συμβατό αν και μόνο αν $B \in C(A)$.

Μέθοδος προσσεγγιστικών λύσεων - εύρεση των ελαχίστων τετραγώνων

Έστω ότι το σύστημα $AX = B$ δεν έχει λύσεις.
Υπάρχει βέλτιστη προσσεγγιστική λύση; Μπορώ να βρω Z έτσι ώστε $AZ - B$ όσο το δυνατόν πιο μικρή;
Δηλαδή θέλουμε $\|AZ - B\|$ όσο το δυνατόν πιο μικρό.
Παρατηρούμε ότι το σύστημα $AQ = B$ είναι συμβατό αν και μόνο αν $B \in C(A)$.

Άρα Z είναι βέλτιστη προσσεγγιστική λύση αν
$AZ = proj_{C(A)}(B)$

Άρα $\|AZ - B\|$ είναι όσο το δυνατόν πιο μικρό αν και μόνο αν $(AZ - B) \perp C(A) \Leftrightarrow (AZ - B) \in C(A)^{\perp} = null(A^T)$

Άρα $\|AZ - B\|$ είναι όσο το δυνατόν πιο μικρό αν και μόνο αν $(AZ - B) \perp C(A) \Leftrightarrow (AZ - B) \in C(A)^{\perp} = null(A^T)$

Δηλαδή αν και μόνο αν

$$A^T(AZ - B) = 0 \Leftrightarrow A^T AZ = A^T B.$$

Αναζητούμε λοιπόν τις λύσεις αυτού του (συμβατού συστήματος)

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Dr. Φωτιάδης Ανέστης
Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2013-14

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης