Χαραλάμπους Χαρά

Ενότητα 7. Εφαρμογές προβολών

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

Χαραλάμπους Χαρά

Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2013

Αριστοτέλειο
Πανεπιστήμιο
Θεσσαλονίκης

Χρηματοδότηση

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα. Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Σύνοψη

1 Ενότητα 7. Εφαρμογές προβολών

Σε αυτή την ενότητα θα μελετηθούν ορθογώνιο συμπλήρωμα χώρου γραμμών= μηδενοχώρος του συζυγή αναστρόφου, μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων, Ευθεία ελαχίστων τετραγώνων, γενικευμένο εσωτερικό γινόμενο.

Ασκήσεις

Πρόβλημα: Να βρεθούν οι τιμές των $a, b, c \in \mathbb{R}$ ώστε το παρακάτω σύστημα να είναι συμβατό

$$x - y = a$$
$$y - z = b$$
$$z - x = c$$

Θυμίζουμε ότι το σύστημα $AX = B$ είναι συμβατό $\Leftrightarrow rank(A) = rank(A|B) \Leftrightarrow B \in \Sigma(A)$ χώρος στηλών του A.

Ασκήσεις

Πρόβλημα: Να βρεθούν οι τιμές των $a, b, c \in \mathbb{R}$ ώστε το παρακάτω σύστημα να είναι συμβατό

$$\begin{aligned} x - y &= a \\ y - z &= b \\ z - x &= c \end{aligned}$$

Θυμίζουμε ότι το σύστημα $AX = B$ είναι συμβατό $\Leftrightarrow rank(A) = rank(A|B) \Leftrightarrow B \in \Sigma(A)$ χώρος στηλών του A.
$\Gamma(A)^{\perp} = null(\bar{A})$

Ασκήσεις

Πρόβλημα: Να βρεθούν οι τιμές των $a, b, c \in \mathbb{R}$ ώστε το παρακάτω σύστημα να είναι συμβατό

$$x - y = a$$
$$y - z = b$$
$$z - x = c$$

Θυμίζουμε ότι το σύστημα $AX = B$ είναι συμβατό
$\Leftrightarrow rank(A) = rank(A|B) \Leftrightarrow B \in \Sigma(A)$ χώρος στηλών του A.
$\Gamma(A)^{\perp} = null(\bar{A})$
$\Leftrightarrow \Sigma(A)^{\perp} = null(\bar{A}^T)$

Ασκήσεις

Πρόβλημα: Να βρεθούν οι τιμές των $a, b, c \in \mathbb{R}$ ώστε το παρακάτω σύστημα να είναι συμβατό

$$x - y = a$$
$$y - z = b$$
$$z - x = c$$

Θυμίζουμε ότι το σύστημα $AX = B$ είναι συμβατό
$\Leftrightarrow rank(A) = rank(A|B) \Leftrightarrow B \in \Sigma(A)$ χώρος στηλών του A.
$\Gamma(A)^{\perp} = null(\bar{A})$
$\Leftrightarrow \Sigma(A)^{\perp} = null(\bar{A}^T)$
$\Leftrightarrow \Sigma(A) = null(\bar{A}^T)^{\perp}$,

Ασκήσεις

Πρόβλημα: Να βρεθούν οι τιμές των $a, b, c \in \mathbb{R}$ ώστε το παρακάτω σύστημα να είναι συμβατό

$$x - y = a$$
$$y - z = b$$
$$z - x = c$$

Θυμίζουμε ότι το σύστημα $AX = B$ είναι συμβατό
$\Leftrightarrow rank(A) = rank(A|B) \Leftrightarrow B \in \Sigma(A)$ χώρος στηλών του A.
$\Gamma(A)^{\perp} = null(\bar{A})$
$\Leftrightarrow \Sigma(A)^{\perp} = null(\bar{A}^T)$
$\Leftrightarrow \Sigma(A) = null(\bar{A}^T)^{\perp}$,
Αφού $(V^{\perp})^{\perp} = V$.

Στο σύστημα αντιστοιχούν οι πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \bar{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Στο σύστημα αντιστοιχούν οι πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \bar{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Υπολογίζουμε τον $\sigma(A)$. Βρίσκουμε πρώτα ότι $\bar{A}^T =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Στο σύστημα αντιστοιχούν οι πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \bar{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Υπολογίζουμε τον $\sigma(A)$. Βρίσκουμε πρώτα ότι $\bar{A}^T =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Άρα

$$rank(\bar{A}^T) = rank(\bar{A}) = rank(A) = 2 \Rightarrow dim\left(null(\bar{A}^T)\right) = 1$$

και $null(\bar{A}^T) = \{z(1,1,1) : z \in \mathbb{C}\}$

Στο σύστημα αντιστοιχούν οι πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \bar{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Υπολογίζουμε τον $\sigma(A)$. Βρίσκουμε πρώτα ότι $\bar{A}^T =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Άρα

$rank(\bar{A}^T) = rank(\bar{A}) = rank(A) = 2 \Rightarrow dim\left(null(\bar{A}^T)\right) = 1$

και $null(\bar{A}^T) = \{z(1,1,1) : z \in \mathbb{C}\}$

Παρατηρούμε ότι $\sigma(A)$ είναι το επίπεδο κάθετο στο $null(\bar{A}^T)$,

άρα $\sigma(A) = \{(a,b,c) \in \mathbb{C}^3 : a + b + c = 0\}$

Άσκηση

Να βρεθεί η εικόνα της επεικόνισης
$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (x - y, y - z, z - x)$

Επιλέγουμε την κανονική βάση e_1, e_2, e_3 του $\mathbb{R}^3$ και βρίσκουμε ότι $A_f = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Επιλέγουμε την κανονική βάση e_1, e_2, e_3 του $\mathbb{R}^3$ και βρίσκουμε ότι $A_f = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Άρα έχουμε ότι

$Im(f) = \sigma(A_f) = \{(a, b, c) \in \mathbb{C}^3 : a + b + c = 0\}$

Πρόταση: $(V^{\perp})^{\perp} = V$

Απόδειξη: Εξ ορισμού έχουμε ότι
$(V^{\perp})^{\perp} = \{u : \langle u, w \rangle = 0, \forall w \in V^{\perp}\} \Rightarrow V \subset (V^{\perp})^{\perp}$

Πρόταση: $(V^{\perp})^{\perp} = V$

Απόδειξη: Εξ ορισμού έχουμε ότι
$(V^{\perp})^{\perp} = \{u : \langle u, w \rangle = 0, \forall w \in V^{\perp}\} \Rightarrow V \subset (V^{\perp})^{\perp}$
Παρατηρούμε ότι $(V^{\perp})^{\perp}$, V διανυσματικοί χώροι με
$V \subset (V^{\perp})^{\perp}$.

Πρόταση: $(V^{\perp})^{\perp} = V$

Απόδειξη: Εξ ορισμού έχουμε ότι
$(V^{\perp})^{\perp} = \{u : \langle u, w \rangle = 0, \forall w \in V^{\perp}\} \Rightarrow V \subset (V^{\perp})^{\perp}$
Παρατηρούμε ότι $(V^{\perp})^{\perp}, V$ διανυσματικοί χώροι με
$V \subset (V^{\perp})^{\perp}$.
Για τις διαστάσεις ισχύει
$dim(V) + dim(V^{\perp}) = n$
$dim(V^{\perp}) + dim((V^{\perp})^{\perp}) = n$

Πρόταση: $(V^{\perp})^{\perp} = V$

Απόδειξη: Εξ ορισμού έχουμε ότι
$(V^{\perp})^{\perp} = \{u : \langle u, w\rangle = 0, \forall w \in V^{\perp}\} \Rightarrow V \subset (V^{\perp})^{\perp}$
Παρατηρούμε ότι $(V^{\perp})^{\perp}, V$ διανυσματικοί χώροι με
$V \subset (V^{\perp})^{\perp}$.
Για τις διαστάσεις ισχύει
$dim(V) + dim(V^{\perp}) = n$
$dim(V^{\perp}) + dim((V^{\perp})^{\perp}) = n \Rightarrow dim(V) = dim((V^{\perp})^{\perp})$. Άρα
$(V^{\perp})^{\perp} = V$.

Άσκηση

Να βρεθούν οι τιμές των $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ώστε το σύστημα $AX = B$ να είναι συμβατό, όπου

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & -7 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$ να είναι συμβατό.

Υπολογίζουμε τον $\sigma(A)$. Βρίσκουμε πρώτα ότι $A^T =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 & -7 \\ -1 & 1 & 3 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Άσκηση

Να βρεθούν οι τιμές των $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ώστε το σύστημα $AX = B$ να είναι συμβατό, όπου

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & -7 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$ να είναι συμβατό.

Υπολογίζουμε τον $\sigma(A)$. Βρίσκουμε πρώτα ότι $A^T =$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 & -7 \\ -1 & 1 & 3 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ Αντιστοιχεί το σύστημα

$$x - 2z + w = 0$$
$$y + z - 3w = 0$$

Άρα

$$
\begin{aligned}
null(A^T) &= \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x - 2z + w = 0, y + z - 3w = 0\} \\
&= \{(2z - w, 3w - z, z, w) : z, w \in \mathbb{R}\} \\
&= \{z(2,-1,1,0) + w(-1,3,0,1) : z, w \in \mathbb{R}\}
\end{aligned}
$$

Άρα

$$
\begin{aligned}
null(A^T) &= \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x - 2z + w = 0, y + z - 3w = 0\} \\
&= \{(2z - w, 3w - z, z, w) : z, w \in \mathbb{R}\} \\
&= \{z(2, -1, 1, 0) + w(-1, 3, 0, 1) : z, w \in \mathbb{R}\}
\end{aligned}
$$

Βάση $null(A^T) = \{(2, -1, 1, 0), (-1, 3, 0, 1)\}$

Άρα

$$null(A^T) = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x - 2z + w = 0, y + z - 3w = 0\}$$
$$= \{(2z - w, 3w - z, z, w) : z, w \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{z(2, -1, 1, 0) + w(-1, 3, 0, 1) : z, w \in \mathbb{R}\}$$

Βάση $null(A^T) = \{(2, -1, 1, 0), (-1, 3, 0, 1)\}$
Έχουμε $\sigma(A) = null(A^T)^{\perp} = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : 2a - b + c = 0, -a + 3b + d = 0\}$

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Dr. Φωτιάδης Ανέστης

Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2013-14

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης