ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

Χαραλάμπους Χαρά

Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2013

Αριστοτέλειο
Πανεπιστήμιο
Θεσσαλονίκης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα. Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Σύνοψη

1 Ενότητα 8. Ισομετρίες
- Παραδείγματα
- Θεώρημα

Σε αυτή την ενότητα θα μελετηθούν ισομετρίες, διατήρηση του εσωτερικού γινομένου και απεικόνιση ορθοκανονικής βάσης σε ορθοκανονική βάση, ισομετρίες στο επίπεδο: αντικατοπτρισμοί, περιστροφές, ισομετρίες στο $\mathbb{R}^3$, ορθογώνιοι πίνακες, ισομετρίες σε ερμητιανούς χώρους, ορθομοναδιαίοι πίνακες.

Αν V ένας $\mathbb{R}-$διανυσματικός Ευκλείδιος χώρος και $f : V \to V$ γραμμική συνάρτηση τότε η f λέγεται ισομετρία αν $\forall v \in V, \|f(v)\| = \|v\|$

Είδαμε ότι f ισομετρία
$\Leftrightarrow \forall v_1, v_2 \in V, < v_1, v_2 >=< f(v_1), f(v_2) >$

Παράδειγμα 1: Αν $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ περιστροφή κατά γωνία $\frac{\pi}{2}$ τότε η f είναι ισομετρία. Έχουμε $f(e_1) = e_2, f(e_2) = -e_1$ και άρα $A_f = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Παράδειγμα 2: Αν $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ αντικατοπτρισμός ως προς το $xy-$ επίπεδο τότε η f είναι ισομετρία. Έχουμε $f(e_1) = e_1, f(e_2) = e_2, f(e_3) = -e_3$ και άρα $A_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Έχουμε $f(a, b, c) = (a, b, -c)$.

Παράδειγμα 1: Αν $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ περιστροφή κατά γωνία $\frac{\pi}{2}$ τότε η f είναι ισομετρία. Έχουμε $f(e_1) = e_2, f(e_2) = -e_1$ και άρα $A_f = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Παράδειγμα 2: Αν $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ αντικατοπτρισμός ως προς το $xy-$ επίπεδο τότε η f είναι ισομετρία. Έχουμε $f(e_1) = e_1, f(e_2) = e_2, f(e_3) = -e_3$ και άρα $A_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Έχουμε $f(a, b, c) = (a, b, -c)$.

Ασκήσεις

Έστω $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ ορθοκανονική βάση Ευκλείδειου χώρου V και $t : V \to V$ ένας ενδομορφισμός του V που ορίζεται από τις σχέσεις

$$t(v_1) = -v_2, \quad t(v_2) = -v_3, \quad t(v_3) = -v_4, \quad t(v_4) = v_1.$$

Να εξετάσετε αν ο t είναι ισομετρία.

Παρατηρούμε ότι
$< f(v_i), f(v_j) >=< v_i, v_j >= \delta_{i,j}, \forall i, j = 1, 2, 3, 4$. Έστω $v \in V$, τότε $v = k_1 v_1 + \ldots + k_4 v_4$ για κάποια $k_1, \ldots, k_4 \in \mathbb{R}, (k_i =< v, v_i >)$. Τότε
$t(v) = k_1 f(v_1) + \ldots + k_4 f(v_4) = k_1 v_2 - k_2 v_3 - k_3 v_4 + k_4 v_1$.

Ασκήσεις

Έστω $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ ορθοκανονική βάση Ευκλείδειου χώρου V και $t : V \to V$ ένας ενδομορφισμός του V που ορίζεται από τις σχέσεις

$$t(v_1) = -v_2, \quad t(v_2) = -v_3, \quad t(v_3) = -v_4, \quad t(v_4) = v_1.$$

Να εξετάσετε αν ο t είναι ισομετρία.

Παρατηρούμε ότι $< f(v_i), f(v_j) >=< v_i, v_j >= \delta_{i,j}, \forall i, j = 1, 2, 3, 4$. Έστω $v \in V$, τότε $v = k_1 v_1 + \ldots + k_4 v_4$ για κάποια $k_1, \ldots, k_4 \in \mathbb{R}, (k_i =< v, v_i >)$. Τότε $t(v) = k_1 f(v_1) + \ldots + k_4 f(v_4) = k_1 v_2 - k_2 v_3 - k_3 v_4 + k_4 v_1$. Άρα, $< v, v >= k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2 =< f(v), f(v) >$, αφού $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ ορθοκανονική βάση. Άρα η t είναι ισομετρία.

Έστω $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}, B' = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ ορθοκανονικές βάσεις Ευκλείδειου χώρου V και $t : V \to V$ ένας ενδομορφισμός του V που ορίζεται από τις σχέσεις

$$t(v_1) = w_1, \quad t(v_2) = w_2, \quad t(v_3) = w_3, \quad t(v_4) = w_4.$$

Να εξετάσετε αν ο t είναι ισομετρία.

Έστω $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}, B' = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ ορθοκανονικές βάσεις Ευκλείδειου χώρου V και $t : V \to V$ ένας ενδομορφισμός του V που ορίζεται από τις σχέσεις

$$t(v_1) = w_1, \quad t(v_2) = w_2, \quad t(v_3) = w_3, \quad t(v_4) = w_4.$$

Να εξετάσετε αν ο t είναι ισομετρία.

Παρατηρούμε ότι $< f(v_i), f(v_j) >=< w_i, w_j >= \delta_{i,j}, \forall i, j = 1, 2, 3, 4$. Έστω $v \in V$, τότε $v = k_1 v_1 + \ldots + k_4 v_4$ για κάποια $k_1, \ldots, k_4 \in \mathbb{R}, (k_i =< v, v_i >)$. Τότε $t(v) = k_1 f(v_1) + \ldots + k_4 f(v_4) = k_1 w_1 + k_2 w_2 + k_3 w_3 + k_4 w_4$.

Έστω $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}, B' = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ ορθοκανονικές βάσεις Ευκλείδειου χώρου V και $t : V \to V$ ένας ενδομορφισμός του V που ορίζεται από τις σχέσεις

$$t(v_1) = w_1, \quad t(v_2) = w_2, \quad t(v_3) = w_3, \quad t(v_4) = w_4.$$

Να εξετάσετε αν ο t είναι ισομετρία.

Παρατηρούμε ότι $< f(v_i), f(v_j) >=< w_i, w_j >= \delta_{i,j}, \forall i, j = 1, 2, 3, 4$. Έστω $v \in V$, τότε $v = k_1 v_1 + \ldots + k_4 v_4$ για κάποια $k_1, \ldots, k_4 \in \mathbb{R}, (k_i =< v, v_i >)$. Τότε $t(v) = k_1 f(v_1) + \ldots + k_4 f(v_4) = k_1 w_1 + k_2 w_2 + k_3 w_3 + k_4 w_4$. Άρα, $< v, v >= k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2 =< f(v), f(v) >$, αφού $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}, B' = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ ορθοκανονικές βάσεις. Άρα η t είναι ισομετρία.

Θεώρημα

Αν $f : V \to V$ γραμμική συνάρτηση τέτοια ώστε για κάποια ορθοκανονική βάση $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ με εικόνες

$$t(v_1) = w_1, \quad t(v_2) = w_2, \quad t(v_3) = w_3, \quad t(v_4) = w_4.$$

και το σύνολο $B' = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ είναι ορθοκανονική βάση τότε η f είναι ισομετρία.

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Dr. Φωτιάδης Ανέστης

Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2013-14

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης