ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

Χαραλάμπους Χαρά

Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2013

Αριστοτέλειο
Πανεπιστήμιο
Θεσσαλονίκης

Χαραλάμπους Χαρά

Ενότητα 8. Ισομετρίες

Χρηματοδότηση

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα. Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Σύνοψη

1 Ενότητα 8. Ισομετρίες

Σε αυτή την ενότητα θα μελετηθούν ισομετρίες, διατήρηση του εσωτερικού γινομένου και απεικόνιση ορθοκανονικής βάσης σε ορθοκανονική βάση, ισομετρίες στο επίπεδο: αντικατοπτρισμοί, περιστροφές, ισομετρίες στο $\mathbb{R}^3$, ορθογώνιοι πίνακες, ισομετρίες σε ερμητιανούς χώρους, ορθομοναδιαίοι πίνακες.

Ισομετρίες στο επίπεδο

Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ περιστροφή κατά γωνία $\phi \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Ισομετρίες στο επίπεδο

Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ περιστροφή κατά γωνία $\phi \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Στην περίπτωση αυτή δεν υπάρχουν πραγματικές ιδιοτιμές.

Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ αντικατοπτρισμός ώς προς ευθεία $y = mx$.

Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ αντικατοπτρισμός ώς προς ευθεία $y = mx$. Ιδιοτιμές $\lambda = 1$ με ιδιοδιάνυσμα $v_1 = (1, m)$ και $\lambda = -1$ με ιδιοδιάνυσμα $v_2 = (-m, 1)$.

Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ αντικατοπτρισμός ώς προς ευθεία $y = mx$. Ιδιοτιμές $\lambda = 1$ με ιδιοδιάνυσμα $v_1 = (1, m)$ και $\lambda = -1$ με ιδιοδιάνυσμα $v_2 = (-m, 1)$.Έχουμε χαρακτηριστικό πολυώνυμο $P_f(x) = (x-1)(x+1)$

Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ αντικατοπτρισμός ώς προς ευθεία $y = mx$. Ιδιοτιμές $\lambda = 1$ με ιδιοδιάνυσμα $v_1 = (1, m)$ και $\lambda = -1$ με ιδιοδιάνυσμα $v_2 = (-m, 1)$.Έχουμε χαρακτηριστικό πολυώνυμο $P_f(x) = (x-1)(x+1)$
Αν θεωρήσουμε τη βάση $D = \{v_1, v_2\}$ τότε ο πίνακας της συνάρτησης είναι

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Έστω $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ισομετρία. Έχουμε ότι $det(A_f) = \pm 1$ άρα αν η f έχει ιδιοτιμές τότε οι ιδιοτιμές είναι ± 1.

Έστω $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ισομετρία. Έχουμε ότι $det(A_f) = \pm 1$ άρα αν η f έχει ιδιοτιμές τότε οι ιδιοτιμές είναι ± 1.
Θυμίζουμε ότι αν $A = A_f$ τότε
$P_f(x) = -x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, όπου $a_0 = det(A_f) = \pm 1$.

Έστω $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ισομετρία. Έχουμε ότι $det(A_f) = \pm 1$ άρα αν η f έχει ιδιοτιμές τότε οι ιδιοτιμές είναι ± 1.
Θυμίζουμε ότι αν $A = A_f$ τότε
$P_f(x) = -x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, όπου $a_0 = det(A_f) = \pm 1$.
Αφού το πολυώνυμο είναι περιττού βαθμού τότε το $P_A(x)$ έχει τουλάχιστον μια πραγματική ρίζα, δηλαδή η f έχει τουλάχιστον μία ιδιοτιμή. Γνωρίζουμε ότι ± 1 είναι ιδιοτιμή της ισομετρίας. Έστω v το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα και $V = S(\{v\})$ ευθεία, $dim(V) = 1$. Τότε $dim(V^{\perp}) = 2$

Έστω $w \in V^{\perp}$, τότε

$$< v, w > = 0 \Rightarrow < f(v), f(W) >= 0$$
$$< \pm v, f(w) > = 0 \Rightarrow < v, f(w) >= 0$$
$$f(w) \in V^{\perp}.$$

Άρα $f|_{V^{\perp}} : V^{\perp} \to V^{\perp}$ ισομετρία στο επίπεδο $V^{\perp}$, άρα θα είναι αντικατοπτρισμός ή περιστροφή. Ακόμα θα έχουμε $f|_V : V \to V$.

Φασματικό Θεώρημα

Έστω ότι $A = \overline{A^T}$ οι ιδιοτιμές του A είναι πραγματικοί αριθμοί και υπάρχει μια ορθογώνια βάση του $\mathbb{C}^n$ που αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του A. Δηλαδή οι συμμετρικοί πίνακες διαγωνιοποιούνται ορθογώνια.

Αντιστοιχούμε στον πίνακα A μια συνάρτηση $\Phi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ έτσι ώστε ο πίνακας της στην κανονική βάση να είναι ο A.

Αντιστοιχούμε στον πίνακα A μια συνάρτηση $\Phi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ έτσι ώστε ο πίνακας της στην κανονική βάση να είναι ο A. Ορίζουμε την απεικόνιση $\Phi^* : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ έτσι ώστε ο πίνακας της στην κανονική βάση να είναι ο $\overline{A^T}$.

Αντιστοιχούμε στον πίνακα A μια συνάρτηση $\Phi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ έτσι ώστε ο πίνακας της στην κανονική βάση να είναι ο A.
Ορίζουμε την απεικόνιση $\Phi^* : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ έτσι ώστε ο πίνακας της στην κανονική βάση να είναι ο $\overline{A^T}$.
Το Φασματικό Θεώρημα λέει ότι αν $\Phi = \Phi^*$ τότε ο Φ έχει πραγματικές ιδιοτιμές και ο $\mathbb{C}^n$ έχει ορθογώνια βάση από ιδιοδιανύσματα της Φ.

Ισομετρίες

$$
\begin{aligned}
A^T\overline{A} = I_n &\Leftrightarrow \\
\overline{A}^T {A^T}^T = I_n &\Leftrightarrow \\
\overline{A}^T A = I_n &\Leftrightarrow \\
A^{-1} = \overline{A^T}
\end{aligned}
$$

Ισομετρίες

$$\begin{aligned} A^T\overline{A} &= I_n \Leftrightarrow \\ \overline{A}^T {A^T}^T &= I_n \Leftrightarrow \\ \overline{A}^T A &= I_n \Leftrightarrow \\ A^{-1} &= \overline{A^T} \end{aligned}$$

Άρα για μια ισομετρία ισχύει ότι $\Phi^{-1} = \Phi^*$.

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Dr. Φωτιάδης Ανέστης

Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2013-14

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης