# *ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ*

Χαραλάμπους Χαρά

Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2013

Αριστοτέλειο
Πανεπιστήμιο
Θεσσαλονίκης

### Χρηματοδότηση

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα. Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

# Σύνοψη

1 Ενότητα 9. φασματικό θεώρημα
- Φασματικό Θεώρημα

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε Προσαρτημένους πίνακεσ, φασματικό θεώρημα, Αυτοπροσαρτημένες γραμμικές συναρτήσεις και ιδιοτιμές τους

$P_A(x) = -(x-4)^2(x-2)$

$\lambda_1 = 4$ αλγεβρική πολλαπλότητα 2

$\lambda_2 = 2$ αλγεβρική πολλαπλότητα 1

$V_{\lambda_1}(A) = S(\{v_1 = (-i, 1, 0), v_2 = (0, 0, 1)\}), dim V_{\lambda_1}(A) = 2$

γεωμετρική πολλαπλότητα

$\Rightarrow A$ διαγωνιοποιείται ορθογώνια

Βάση $A$ από ιδιοδιανύσματα $\{v_1, v_2, v_3\}$, όπου $\{v_1, v_2\}$ βάση του $V_{\lambda_1}(A)$ και $\{v_3\}$ βάση του $V_{\lambda_2}(A)$

Βάση $A$ από ιδιοδιανύσματα $\{v_1, v_2, v_3\}$, όπου $\{v_1, v_2\}$ βάση του $V_{\lambda_1}(A)$ και $\{v_3\}$ βάση του $V_{\lambda_2}(A)$
Γνωρίζουμε ότι $\{v_1, v_2\}$ και $\{v_3\}$ ορθογώνια μεταξύ τους, και μπορούμε να επιλέξουμε $v_1, v_2$ ως ορθογώνια.

Αν $A^* = A$ και $v \in V_{\lambda_1}(A), w \in V_{\lambda_2}(A)$ τότε $< v, w >= 0$.
Άρα, αν $A$ διαγωνιοποιείται τότε διαγωνιοποιείται ορθογώνια, δηλαδή υπάρχει μια ορθογώνια βάση από ιδιοδιανύσματα.

Αν $A^* = A$ και $v \in V_{\lambda_1}(A), w \in V_{\lambda_2}(A)$ τότε $< v, w >= 0$. Άρα, αν $A$ διαγωνιοποιείται τότε διαγωνιοποιείται ορθογώνια, δηλαδή υπάρχει μια ορθογώνια βάση από ιδιοδιανύσματα.Στο παράδειγμά μας, βρίσκουμε $V_{\lambda_2}(A) = S(\{v_3 = (i, 1, 0)\})$ και παρατηρούμε ότι όντως $< v_1, v_3 >=< v_2, v_3 >= 0$ και γενικά βρίσκουμε ότι $\{v_1, v_2, v_3\}$ είναι μια ορθογώνια βάση.

Αν $A^* = A$ και $v \in V_{\lambda_1}(A), w \in V_{\lambda_2}(A)$ τότε $< v, w >= 0$. Άρα, αν $A$ διαγωνιοποιείται τότε διαγωνιοποιείται ορθογώνια, δηλαδή υπάρχει μια ορθογώνια βάση από ιδιοδιανύσματα.Στο παράδειγμά μας, βρίσκουμε $V_{\lambda_2}(A) = S(\{v_3 = (i, 1, 0)\})$ και παρατηρούμε ότι όντως $< v_1, v_3 >=< v_2, v_3 >= 0$ και γενικά βρίσκουμε ότι $\{v_1, v_2, v_3\}$ είναι μια ορθογώνια βάση.

Θεωρούμε τον πίνακα $P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Τότε

$P^{-1} = P^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$ και βρίσκουμε

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

# Φασματικό Θεώρημα

**Τηεορεμ**

*Άν $\Phi : V \to V$ αυτοπροσαρτημένη γραμμική συνάρτηση τότε η $\Phi$ διαγωνοποιείται και ο χώρος $V$ έχει μια ορθογώνια βάση από ιδιοδιανύσματα της $\Phi$*

# Απόδειξη

Αφού $\Phi : V \to V$ αυτοπροσαρτημένη γραμμική συνάρτηση τότε οι ιδιοτιμές της είναι πραγματικοί αριθμοί.

# Απόδειξη



Αφού $\Phi : V \to V$ αυτοπροσαρτημένη γραμμική συνάρτηση τότε οι ιδιοτιμές της είναι πραγματικοί αριθμοί. Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή επάνω στη διάσταση του $V$. Αν $dimV = 1$ τότε ο $V$ έχει για βάση από ιδιοδιάνυσμα.

# Απόδειξη



Αφού $\Phi : V \to V$ αυτοπροσαρτημένη γραμμική συνάρτηση τότε οι ιδιοτιμές της είναι πραγματικοί αριθμοί. Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή επάνω στη διάσταση του $V$. Αν $dimV = 1$ τότε ο $V$ έχει για βάση από ιδιοδιάνυσμα. Έστω ότι το θεώρημα αληθεύει για όλους τους χώρους με διάσταση μικρότερη του $n$.

# Απόδειξη



Αφού $\Phi : V \to V$ αυτοπροσαρτημένη γραμμική συνάρτηση τότε οι ιδιοτιμές της είναι πραγματικοί αριθμοί. Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή επάνω στη διάσταση του $V$.
Αν $dimV = 1$ τότε ο $V$ έχει για βάση από ιδιοδιάνυσμα.
Έστω ότι το θεώρημα αληθεύει για όλους τους χώρους με διάσταση μικρότερη του $n$.
Έστω τώρα ότι $dimV = n$ και ας είναι $\lambda_1$ ιδιοτιμή της $\Phi$ και $v_1$ είναι ιδιοδιάνυσμα. Έστω $V_1 = S(\{v_1\})$. Θέλουμε να δείξουμε ότι τα υπόλοιπα $n-1$ ιδιοδιανύσματα ανήκουν στον $V_1^{\perp}$.
Γνωρίζουμε ότι $dimV_1^{\perp} = n-1$

Αναζητούμε αυτοπροσαρτημένη συνάρτηση $V_1^{\perp} \to V_1^{\perp}$ με ιδιοδιανύσματα να είναι και ιδιοδιανύσματα της Φ. Θα δείξουμε ότι $\Phi|_{V_1^{\perp}} V_1^{\perp} \to V_1^{\perp}$.

Αναζητούμε αυτοπροσαρτημένη συνάρτηση $V_1^{\perp} \to V_1^{\perp}$ με ιδιοδιανύσματα να είναι και ιδιοδιανύσματα της Φ. Θα δείξουμε ότι $\Phi|_{V_1^{\perp}} V_1^{\perp} \to V_1^{\perp}$.Έστω $w \in V_1^{\perp}$. Τότε

$$\begin{aligned} < \Phi(w), v_1 > &=< w, \Phi^*(v_1) >=< w, \Phi(v_1) > \\ &=< w, \lambda_1 v_1 >= \lambda_1 < w, v_1 >= 0 \end{aligned}$$

Αναζητούμε αυτοπροσαρτημένη συνάρτηση $V_1^{\perp} \to V_1^{\perp}$ με ιδιοδιανύσματα να είναι και ιδιοδιανύσματα της Φ. Θα δείξουμε ότι $\Phi|_{V_1^{\perp}} V_1^{\perp} \to V_1^{\perp}$.Έστω $w \in V_1^{\perp}$. Τότε

$$\begin{aligned} < \Phi(w), v_1 > &=< w, \Phi^*(v_1) >=< w, \Phi(v_1) > \\ &=< w, \lambda_1 v_1 >= \lambda_1 < w, v_1 >= 0 \end{aligned}$$

άρα $\Phi(w) \in V_1^{\perp}$ και συνεπώς $\Phi|_{V_1^{\perp}} V_1^{\perp} \to V_1^{\perp}$.

Αναζητούμε αυτοπροσαρτημένη συνάρτηση $V_1^{\perp} \to V_1^{\perp}$ με ιδιοδιανύσματα να είναι και ιδιοδιανύσματα της Φ. Θα δείξουμε ότι $\Phi|_{V_1^{\perp}} V_1^{\perp} \to V_1^{\perp}$.Έστω $w \in V_1^{\perp}$. Τότε

$$\begin{aligned} < \Phi(w), v_1 > &=< w, \Phi^*(v_1) >=< w, \Phi(v_1) > \\ &=< w, \lambda_1 v_1 >= \lambda_1 < w, v_1 >= 0 \end{aligned}$$

άρα $\Phi(w) \in V_1^{\perp}$ και συνεπώς $\Phi|_{V_1^{\perp}} V_1^{\perp} \to V_1^{\perp}$.
Από την υπόθεση της επαγωγής προκύπτει η ζητούμενη βάση.

# Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Dr. Φωτιάδης Ανέστης

Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2013-14

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης